

Contrôle continu : Mécanique Quantique SMP4(g1 et g2)

08 Mai 2014

club najah
Durée : 1h15mn

EL MALKI Mohammed

www.clubnajah.blogspot.com

Exercice 1

1. Soit A, B , et C des opérateurs qui agissent dans un espace des états E ,
Le commutateur de A et B est défini par : $[A, B] = AB - BA$.
– Montrer que $[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$
2. Soient X et P_x respectivement les opérateurs hermitiques de position et d'impulsion.
 - a. Montrer que : $[X, X^n P_x] = i\hbar X^n, n=0,1,2,\dots$
 - b. Montrer que $\frac{1}{2}(X^2 P_x + P_x X^2) = X P_x X$

Exercice 2

On définit l'opérateur *parité*, Π , par son action sur les vecteurs de base $|x\rangle$ par $\Pi|x\rangle = |-x\rangle$.

- a. Montrer que $\Pi^n = \begin{cases} I & \text{si } n \text{ est pair} \\ \Pi & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$
Où I est l'opérateur identité.
- b. Soit $|\psi\rangle$ un état quantique qui décrit un système physique, Que décrit l'action $\Pi|\psi\rangle$?.
- c. Montrer que Π est hermitique et unitaire.
- d. Déterminer les valeurs propres de Π et montrer que les kets $|\psi\rangle$ associés à ces valeurs propres correspondent à des fonctions paires (notées $\psi_+(x)$) ou impaires (notées $\psi_-(x)$).
- e. Donner l'action de Π sur les vecteurs de bases $|p_x\rangle$.
- f. Soient, $\tilde{X} = \Pi X \Pi^\dagger$ et $\tilde{P}_x = \Pi P_x \Pi^\dagger$, respectivement les transformés des opérateurs X et P par l'opérateur parité Π .
 - Montrer que X et P_x sont impaires : ($\tilde{X} = -X$ et $\tilde{P}_x = -P_x$).
 - Calculer $\Pi X^2 \Pi^\dagger$ et $\Pi P_x^2 \Pi^\dagger$. Que peut on dire de X^2 et P_x^2 ?.
 - En déduire que X^2 et P_x^2 commutent avec Π .

$$(u_i, u_j) = \iiint u_i^*(r) u_j(r) d^3r = \delta_{ij}$$

$$\Psi(r) = \sum c_i u_i(r)$$

$$c_i = (u_i, \Psi)$$

$$\Psi(r) = \sum_j c_j u_j(r) = \sum (u_j, \Psi) u_j(r)$$

$$= \sum_k \iiint d^3r u_k^*(r) \Psi(r) u_k(r)$$

$$= \iiint d^3r \Psi(r) \underbrace{\sum_k u_k^*(r) u_k(r)}_{=1}$$

$\sum_i u_i^*(r') \cdot u_i(r) = \delta(r-r')$ appelle la relation de fermeture.

club najah

EL MALKI Mohammed

www.clubnajah.blogspot.com

Examen de Mécanique Quantique
SMC4 -2h-

Exercice 1

- 1) Soit A une observable et soient $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ deux vecteurs propres de A correspondants aux valeurs propres différentes λ_1 et λ_2 respectivement. Soit B une observable telle que $[A, B] = 0$. Montrer que $\langle \psi_1 | B | \psi_2 \rangle = 0$.
- 2) On considère un système physique dont l'espace des états propres est rapporté à la base orthonormée formée par $|u_1\rangle, |u_2\rangle$ et $|u_3\rangle$. Dans cette base l'opérateur A est défini par

$$A|u_1\rangle = |u_1\rangle \quad A|u_2\rangle = 0 \quad A|u_3\rangle = -|u_3\rangle$$
 - a) Ecrire la matrice représentant A dans la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. Est-elle hermitique ?
 - b) Soit M la matrice représentant un opérateur qui commute avec A . A l'aide de la question (1), déduire la valeur de $\langle u_i | M | u_j \rangle$ avec $i \neq j$ et $i, j = 1, 2, 3$. En déduire la forme générale de M .
 - c) On définit l'opérateur B par $B|u_1\rangle = |u_3\rangle$, $B|u_2\rangle = |u_2\rangle$, $B|u_3\rangle = |u_1\rangle$. Ecrire la matrice représentant B dans la base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. B est-elle hermitique ?
 - d) Donnez une base de vecteurs propres communs à A^2 et B et vérifiez si ces deux observables forment un E.C.O.C ?

Exercice II

On considère dans un problème à une dimension l'hamiltonien $H = \frac{p^2}{2m} + V(X)$ d'une particule de masse m , plongée dans un potentiel $V(x)$ indépendant du temps. L'état de la particule à l'instant t est décrit par $|\psi(t)\rangle$ qui obéit à l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = H |\psi(t)\rangle$$

- 1) Ecrire cette équation en représentation $\{|x\rangle\}$
- 2) En posant $\psi(x, t) = \varphi(x)e^{-iEt/\hbar}$ établir l'équation aux valeurs propres de H satisfaite par la fonction $\varphi(x)$, E étant l'énergie de la particule.
- 3) Supposons que le potentiel $V(x)$ est défini par :
$$\begin{cases} V(x) = 0 & \text{si } 0 \leq x \leq a \\ V(x) = \infty & \text{si } x < 0 \text{ ou } x > a \end{cases}$$
 - a) décrire brièvement (et sans calcul) le comportement classique de la particule dans ce potentiel.
 - b) Quantiquement la fonction d'onde normée $\varphi(x)$ s'écrit dans $[0, a]$ sous forme:

$$\varphi(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad \text{avec } k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

En tenant compte des conditions. $\varphi(0) = \varphi(a) = 0$, déterminer $\varphi(x)$

- c) Montrer que les niveaux d'énergie sont quantifiés ($E_n = f(n)$, n entier)
- d) Si $n=0$, quelle serait l'incertitude Δk sur k ? En déduire l'incertitude Δx Quelle est donc l'énergie la plus basse du système? Justifier votre réponse.

$$4) \text{ Si la particule est décrite par la fonction d'onde } \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \text{ correspondant aux énergies } E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2}$$

Calculer la valeur moyenne $\langle P_x \rangle$ ainsi que l'écart quadratique moyen ΔP_x

P_x Etant l'une des composantes de l'opérateur vectoriel \vec{P} associé à la particule

DEUXIEME SESSION
EPREUVE DE MECANIQUE QUANTIQUE
(durée : 1 h)

QUESTIONS DE COURS

1) Fondements de la théorie quantique

Etablir les relations fondamentales de la théorie quantique de la lumière.

2) Contenu physique de l'équation de Schrödinger (évolution de la valeur moyenne d'une observable)

On travaille en représentation $\{|x\rangle\}$, X et P sont respectivement les opérateurs position et impulsion.

1°) Donner les valeurs de $\partial X/\partial t$ et $\partial P/\partial t$. Justifier votre réponse.

2°) Pour un système conservatif,

$$H = P^2/2m + V(X)$$

Où H est l'opérateur hamiltonien du système, $V(X)$ est l'opérateur associé à l'énergie potentielle.

Etablir l'expression du théorème d'Ehrenfest.

EXERCICE

Soient H l'opérateur hamiltonien d'un système et $\{|\varphi_n\rangle\}$ une base des états propres de H .

1°) Montrer que pour tout opérateur A on a :

$$\langle \varphi_n | [A, H] | \varphi_n \rangle = 0$$

2) On se limite au cas unidimensionnel où

$$H = P^2/2m + V(X)$$

a) Calculer en fonction de P , X et $V(X)$ les commutateurs

$$[H, P], [H, X], [H, XP]$$

b) Montrer que $\langle \varphi_n | P | \varphi_n \rangle = 0$

c) Montrer que $\langle \varphi_n | P^2/2m | \varphi_n \rangle = \frac{1}{2} \langle \varphi_n | X dV(X)/dX | \varphi_n \rangle$.

En déduire la relation liant l'énergie cinétique à celle de l'énergie potentielle dans le cas où :

$$V(X) = V_0 X^k \quad (k > 2)$$

Contrôle de mécanique quantique

I- On considère un système physique dont l'espace des états quantiques est rapporté à la base orthonormée $B = \{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. Dans cette base, l'Hamiltonien sera représenté par la matrice \hat{H} . Une observable physique \hat{L}_Z associée à ce système est donnée par une matrice (3x3) dans la même base :

$$\hat{L}_Z = \begin{pmatrix} +\hbar & 0 & 0 \\ 0 & -\hbar & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_B \quad \text{et} \quad \hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & \hbar\omega & 0 \\ \hbar\omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_B, \quad \omega \text{ est une constante positive.}$$

- 0) Donner un exemple physique de système décrit par \hat{H} . Que représente physiquement l'observable \hat{L}_Z .
- 1) Déterminer les énergies $\{E_K\} : E_1 < E_2 < E_3$ et les états physiques associés $\{|\Phi_K\rangle\}$.
- 2) A $t=0$, l'état du système est $|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_2\rangle + |u_3\rangle)$. Calculer les probabilités pour chacun des résultats de mesure de \hat{L}_Z .
- 3) Quel est l'état de ce système à un instant t ultérieur.
- 4) Dédire les nouvelles probabilités des résultats de mesure effectuées sur \hat{L}_Z .
- 5) Déterminer la valeur moyenne $\langle \hat{L}_Z \rangle$ aux instants $t=0$ et $t>0$. Conclure.

II- Le mouvement d'une particule de masse m est assimilable à un oscillateur harmonique à une dimension (OX). On désigne par x son élongation, p_x son impulsion (quantité de mouvement) et ω sa pulsation.

0) Ecrire l'Hamiltonien classique de la particule en fonction des données.

- 1) On définit deux opérateurs : $\hat{X}_I = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} \hat{X}$ et $\hat{P}_I = \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}} \hat{P}_x$, où \hat{X} et \hat{P}_x sont les observables associées à la position x et l'impulsion p_x . Les opérateurs création et annihilation sont définis par : $a = \frac{\hat{X}_I + i\hat{P}_I}{\sqrt{2}}$ et $a^+ = \frac{\hat{X}_I - i\hat{P}_I}{\sqrt{2}}$.

Calculer le commutateur $[a, a^+]$.

- 2) Exprimer l'opérateur Hamiltonien \hat{H} en fonction de a et a^+ .
- 3) En déduire que : $\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{N} + \frac{1}{2} \hat{\mathbb{I}} \right)$ où $\hat{N} = a^+ a$ et $\hat{\mathbb{I}}$ représente l'opérateur unité.
- 4) On admettra que les états propres de \hat{N} sont donnés par $|\hat{N}| \varphi_n \rangle = n |\varphi_n \rangle$, n est un entier naturel. Dédire les énergies du système en fonction de n .

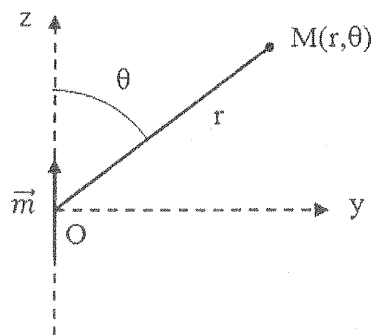
Examen de Physique appliquée à la géologie
 Session normale (Durée 1h30 mn)

- ✓ L'épreuve est composée de deux parties indépendantes.
- ✓ Les deux parties étant à rédiger sur des copies séparées.

Partie I : Géomagnétisme

Question de cours : On rappelle l'expression du potentiel scalaire $V^*(r, \theta)$ d'un dipôle magnétique de moment \vec{m} en un point $M(r, \theta)$:

$$V^*(r, \theta) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \cos \theta}{r^2}$$



- 1) Calculer les deux composantes radiale B_r et orthoradiale B_θ .
- 2) Calculer B la norme du champ magnétique \vec{B} .

Exercice

Le champ géomagnétique créé par la Terre, \vec{B} est caractérisé en tout point de la terre par sa norme B , sa déclinaison D , et son inclinaison I . Gauss a montré que le champ magnétique terrestre peut, en première approximation, être considéré comme le champ d'un dipôle, de moment magnétique \vec{m} , placé au centre O de la Terre et dirigé selon l'axe des pôles magnétiques, assimilé ici à l'axe des pôles géographiques ($D = 0^\circ$).

- 1) Définir l'inclinaison et la déclinaison en un point M de la terre.
- 2) Exprimer \vec{B} en fonction de la latitude λ du point M .
- 3) En déduire l'inclinaison en fonction de la latitude.
- 4) À Khmiss Zemamra ($\lambda = 32,63^\circ$ N), on mesure une composante horizontale du champ magnétique $B_H = 2,05 \cdot 10^{-5}$ T. On donne $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ SI et Rayon terrestre $R = 6370$ km
 - a) En déduire la norme du moment magnétique \vec{m} et l'inclinaison I en ce point.
 - b) Quel est le sens du moment magnétique ? Justifier.

Partie II : Elasticité

On considère un matériau élastique de coefficients de Lamé λ et μ . Le champ de déplacement donné par :

$$\vec{u}(M) = \begin{pmatrix} u_1 = kx_2 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le tenseur des déformations $\varepsilon(M)$
2. On se place au point A_0 de coordonnées $(1, 1, 0)$. Soit $\vec{d} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$
Calculer la dilatation linéaire en A_0 dans les directions \vec{e}_1 , \vec{e}_2 et \vec{d}
3. Calculer les distorsions angulaires suivantes

$$g(A_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2) \quad \text{et} \quad g(A_0, \vec{e}_1, \vec{d})$$

4. Déterminer le tenseur des contraintes $\sigma(M)$

TD d'Electricité 3

Série n° 1

Exercice 1 : 1) Soit deux charges $-q$ et $+q$ placés en A et B, distante de $AB = d$ et situées dans un champ électrostatique extérieur \vec{E}_0 uniforme.

- a) Exprimer la force résultante \vec{F} et le moment du couple s'exerçant sur le dipôle en fonction de son moment dipolaire \vec{p} .

- b) Montrer que l'énergie d'interaction entre le dipôle et le champ extérieur vaut :

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$$

- c) Etudier les positions d'équilibre du dipôle et discuter leur stabilité

2) Le dipôle étant placé maintenant dans un champ électrostatique extérieur quelconque.

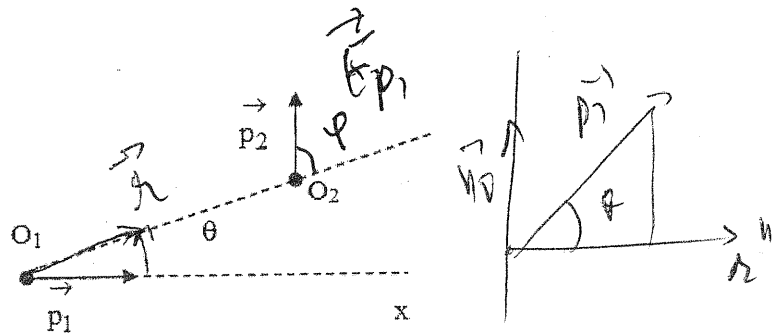
- a) Etablir l'expression de la résultante de la force s'exerçant sur le dipôle.
b) Etablir l'expression du moment du couple agissant sur le dipôle.
c) Quelles sont les actions de ce couple et de la force résultante ? Existe-t-il une position d'équilibre du dipôle ?
d) Que vaut l'énergie d'interaction entre le dipôle et le champ extérieur ?

3) Le dipôle précédent \vec{p}_2 est placé maintenant dans le champ d'un autre dipôle \vec{p}_1

- a) Donner l'expression du champ électrostatique créé par le dipôle \vec{p}_1 au centre O_2 du dipôle \vec{p}_2 .

$$\theta = (\vec{Ox}, \vec{O_1O_2})$$

$$r = O_1O_2$$

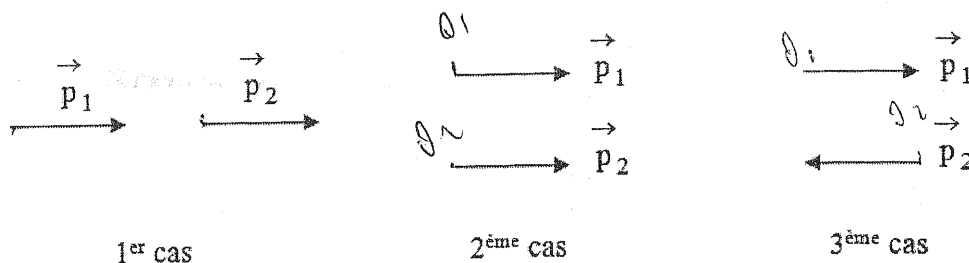


$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p}_1}{r^3} (2\cos\theta \vec{u}_r + \sin\theta \vec{u}_\theta)$$

$$\vec{p}_2 = p_2 (\cos\theta \vec{u}_r - \sin\theta \vec{u}_\theta)$$

b) Exprimer l'énergie d'interaction entre \vec{p}_1 et \vec{p}_2 .

c) Application : y a-t-il attraction ou répulsion dans les 3 représentations ci-dessous, les centres des deux dipôles étant toujours distants de r ?



d) Comment doivent être disposés les dipôles électrostatiques des macromolécules polaires les plus stables.

Exercice 2 : On considère un dipôle électrique formé d'un proton (charge e) et d'un électron distants de $\ell = 0,53 \text{ \AA}$.

- 1) Calculer le moment dipolaire électrique p de ce dipôle.
- 2) Calculer son énergie électrostatique E_i . On donnera le résultat en joule et en eV.

On place ce dipôle dans un champ électrique extérieur de valeur le champ de claquage de l'air $E_0 = 3.10^6 \text{ V.m}^{-1}$.

- 3) Comment s'oriente ce dipôle par rapport à ce champ ?
- 4) Rappeler l'expression de l'énergie potentielle E_p d'un dipôle dans un champ électrique E_0
- 5) Calculer cette énergie en Joule puis en eV.
- 6) Comparer E_p et E_i et conclure.

Exercice 3 : Un condensateur plan a des armatures de surface S distante de e . On néglige les effets de bord et on lui applique une d.d.p U . L'espace entre les armatures est rempli par un diélectrique linéaire homogène de permittivité ϵ .

- 1) Calculer la capacité C du condensateur.
- 2) Exprimer σ_p (densité de charges surfaciques de polarisation) en fonction de σ (densité de charges surfaciques libre).
- 3) Déterminer l'énergie emmagasinée W dans le diélectrique et la force qui s'exerce sur chaque armature.
- 4) Comparer les résultats avec celui du condensateur sans diélectrique.

Exercice 4 : Soit un volume diélectrique (l h i) de permittivité relative ϵ_r de forme sphérique, de rayon R , placé dans un champ extérieur uniforme \vec{E}_0 .

On admettra que la polarisation \vec{P} est uniforme à l'intérieur de ce volume.

1) Calculer les densités de charges σ_p et ρ_p en un point M de la sphère.

2) Montrer que le champ dépolarisant \vec{E}_p crée par les charges de polarisations au centre

de la sphère est égal à : $\vec{E}_p = \frac{1-\epsilon_r}{2+\epsilon_r} \vec{E}_0$.

3) Etudier les cas $\epsilon_r = 1$ et $\epsilon_r = \infty$, et interpréter ces résultats.

4) Calculer le champ total \vec{E} à l'intérieur du diélectrique en fonction de ϵ_r et \vec{E}_0 .

5) Déterminer les vecteurs polarisation \vec{P} et excitation \vec{D} en tout point de la sphère en fonction de ϵ_r et \vec{E}_0 .

6) En admettant que le champ extérieur crée par les charges de polarisations est équivalent à celui d'un dipôle de moment $p = \frac{4}{3} \pi R^3 P$.

a) Donner les composantes du vecteur \vec{E}'_p en un point $M(r, \theta)$ avec $r \gg R$.

b) En déduire alors le champ extérieur total \vec{E}' en M .

c) Déterminer les vecteurs \vec{P}' et \vec{D}' à l'extérieur du diélectrique.

d) Les lois de continuité de \vec{E} et \vec{D} sont-elles respectées ? Justifier votre réponse.

=====

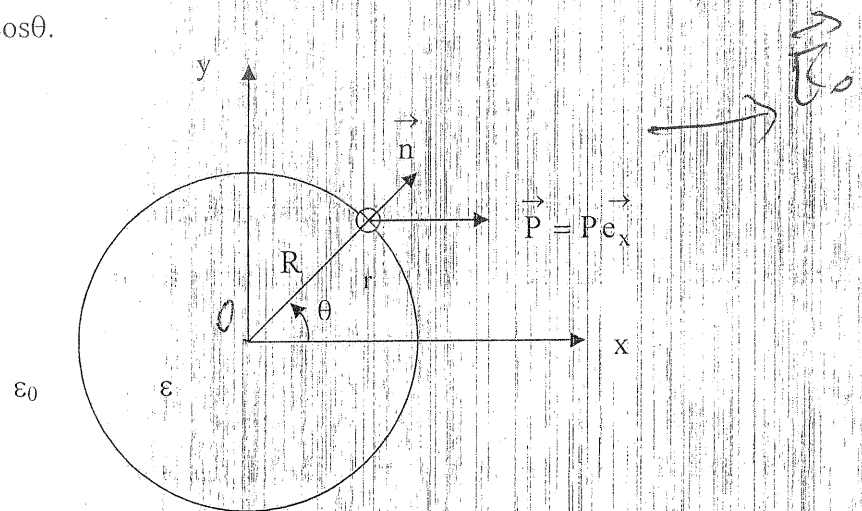
Correction de TD 2
Electricité 3

Exercice 4 : Une petite sphère polarisée de permittivité ϵ_r , de centre O et de rayon R est placée dans le vide. Cette sphère polarisée possède un moment dipolaire électrique \vec{p} , et est caractérisée par le vecteur polarisation \vec{P} uniforme.

- 1) Puisque le vecteur polarisation \vec{P} uniforme dans toute la sphère, le champ dépolarisant \vec{E}_p crée en tout point de cette sphère est uniforme ce qui nous ramène à calculer le champ polarisant au centre O de la sphère.

Charges de polarisation :

- a) charges volumiques de polarisation $\rho_p = -\text{div } \vec{P} = 0$ (polarisation \vec{P} uniforme)
b) Charges surfaciques de polarisation de densité $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$ qui a le sens indiqué sur la figure et pour module $\sigma_p = P \cos \theta$.



- 2) Soit le vecteur unitaire de la normale à la sphère en un point orientée vers l'extérieur du milieu polarisé.

Une surface élémentaire dS contenant une charge dq_p : $dq_p = \sigma_p dS = 2\pi R^2 \sin \theta \cos \theta d\theta$

Cette spire crée en O centre de la sphère un champ électrique dépolarisant dE_p porté par la direction Ox en sens contraire de \vec{P} et de module $dE_p = \frac{\sigma_p dS}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \theta$ (avec $0 \leq \theta \leq \pi$) donc

$$dE_p = -\frac{\sigma_p dS}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos\theta = \frac{P}{2\epsilon_0} \cos^2\theta \sin\theta d\theta.$$

Le champ démagnétisant créé par la sphère aimantée en O est :

$$E_p = \int_0^\pi dE_p = -\frac{P}{2\epsilon_0} \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta d\theta = -\frac{P}{3\epsilon_0}$$

d'où $\vec{E}_p = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0}$

Puisque le milieu est (l.h.i) $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ d'où $\vec{E}_p = -\chi \frac{\vec{E}}{3}$ et $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$

On trouve : $\vec{E}_p = \frac{1-\epsilon_r}{2+\epsilon_r} \vec{E}_0$

$\chi = 1 - \epsilon_r$

3) Etude des cas $\epsilon_r = 1$ et $\epsilon_r = \infty$, $\epsilon_r = 1 \Rightarrow \vec{E}_p = \vec{0}$ cas du vide pas de polarisation $\epsilon = \epsilon_0$

$\epsilon_r = \infty \Rightarrow \vec{E}_p = -\vec{E}_0$ cas d'un conducteur en équilibre

4) Le champ total $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p = \frac{3}{2+\epsilon_r} \vec{E}_0$

5) Vecteur polarisation $\vec{P} = 3\epsilon_0 \frac{\epsilon_r - 1}{2 + \epsilon_r} \vec{E}_0$ et $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$

6) En tout point extérieur éloigné la sphère se comporte comme un dipôle électrique de moment dipolaire $p = \frac{4}{3} \pi R^3 P$. L'expression vectorielle de ce champ créé par un dipôle

électrique :

$$\vec{E}'_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{p}}{r^5}$$

a) Le vecteur champ électrique créé par un dipôle électrique s'écrit

alors : $\vec{E}'_p = E'_r \vec{e}_r + E'_\theta \vec{e}_\theta$ avec les composantes radiale $E'_r = \frac{2p \cos\theta}{4\epsilon_0 \pi r^3}$ et orthoradiale

$E'_\theta = \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$. Si on remplace $p = \frac{4}{3} \pi R^3 P$ dans cette expression on a

$$\vec{E}'_p = \frac{2P}{3\epsilon_0} \left[\frac{R}{r} \right]^3 \cos\theta \vec{e}_r + \frac{P}{3\epsilon_0} \left[\frac{R}{r} \right]^3 \sin\theta \vec{e}_\theta$$

b) Le champ total pour $r > R$:

$$\vec{E}' = E_0 \vec{e}_x + \frac{2P}{3\epsilon_0} \left[\frac{R}{r} \right]^3 \cos\theta \vec{e}_r + \frac{P}{3\epsilon_0} \left[\frac{R}{r} \right]^3 \sin\theta \vec{e}_\theta$$

Le champ total pour $r < R$:

$$\vec{E} = \left(E_0 - \frac{P}{3\epsilon_0} \right) \vec{e}_x \text{ avec } \vec{e}_x = \cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta$$

$\vec{E}_p = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} = -\frac{P}{3\epsilon_0} \vec{e}_x$

$\vec{P} = P \vec{e}_x$

c) Les vecteurs \vec{P}' et \vec{D}' à l'extérieur du diélectrique : $\vec{P}' = \vec{0}$ et $\vec{D}' = \epsilon_0 \vec{E}'$

d) Les lois de continuité de \vec{E} et \vec{D} :

La sphère diélectrique ne contient aucune charge libre sur sa surface d'où les composantes normale de \vec{D} et tangentielle de \vec{E} devraient être continues.

A la surface de la sphère nous avons :

Le champ total pour $r = R$:

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_x + \frac{2P}{3\epsilon_0} \cos\theta \vec{e}_r + \frac{P}{3\epsilon_0} \sin\theta \vec{e}_\theta$$

$$\vec{E} = \left(E_0 - \frac{P}{3\epsilon_0}\right) (\cos\theta \vec{e}_r - \sin\theta \vec{e}_\theta)$$

Si tous les calculs sont faites correctement on constate que les condition aux limites sont vérifiés (je vous laisse le soin de faire ces calculs. Merci)

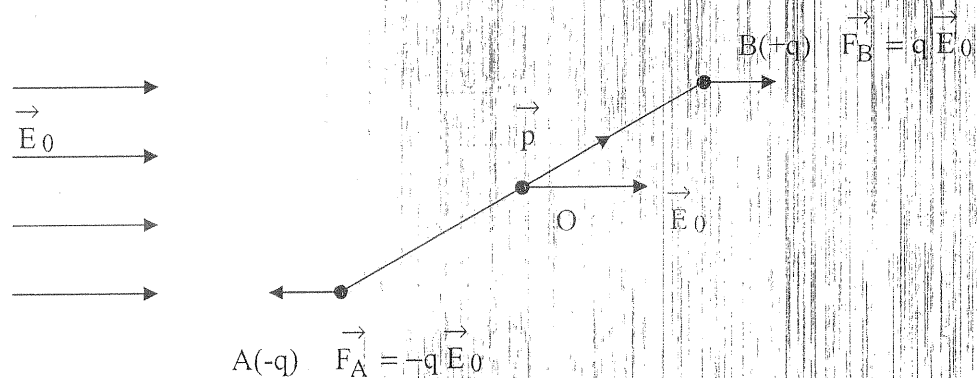
TD d'Electricité 3

Correction de la série n° 1

Exercice 1 : 1) Soit deux charges $-q$ et $+q$ placées en A et B, distante de $AB = d$ et situées dans un champ électrostatique extérieur \vec{E}_0 uniforme.

a) - Force résultante \vec{F}

Le problème consiste à déterminer la force résultante exercée sur le dipôle dans un champ extérieur \vec{E}_0 uniforme créée par les charges autres que celles qui composent le dipôle et le moment résultant correspondant.



La force résultante $\vec{F} = \vec{F}_A + \vec{F}_B = -q\vec{E}_0 + q\vec{E}_0 = 0$, d'où la somme des forces qui s'exercent sur un dipôle dans un champ uniforme est nulle.

- Moment résultant de forces par rapport au point O.

$$\vec{M}/O = \vec{OB} \wedge \vec{F}_B + \vec{OA} \wedge \vec{F}_A = (\vec{OB} \wedge q\vec{E}_0) - (\vec{OA} \wedge q\vec{E}_0)$$

$$\vec{M}/O = q(\vec{OA} + \vec{AB}) \wedge \vec{E}_0 - (\vec{OA} \wedge q\vec{E}_0) = q\vec{AB} \wedge \vec{E}_0$$

D'où le moment résultant $\vec{M}/O = \vec{p} \wedge \vec{E}_0$

b) Energie d'interaction entre le dipôle et le champ extérieur

On recherche l'énergie que doit fournir un opérateur pour amener le dipôle considéré comme indéformable d'une position située à l'infini à sa position finale : cette énergie

serait nécessaire pour arracher le dipôle à un champ électrique, nous l'appellerons « énergie d'interaction du dipôle avec un champ » qui a pour expression :

$$E_p = q(V_B - V_A)$$

Dans l'approximation dipolaire, la variation du champ électrique sur un espace de la dimension du dipôle est infime et peut être assimilée à une différentielle. La différence de potentiel, opposée de la circulation du champ électrique, est donnée par le produit du champ par la longueur du dipôle.

Nous pouvons donc écrire :

$$E_p = q(V_B - V_A) = -q \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{E_0} = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E_0}$$

Nous retiendrons cette expression de l'énergie d'interaction du dipôle avec le champ :

$$E_p = -\overrightarrow{p} \cdot \overrightarrow{E_0}$$

$E_p = p \cdot E_0 \cos \theta$

Positions d'équilibre du dipôle et stabilité

Positions d'équilibre :

Elles sont données par les extremums de E_p par rapport à l'angle θ entre le moment électrique et le champ appliqué.

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = p E_0 \sin \theta \quad \text{donc} \quad \frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0 \text{ si } \theta = 0 \text{ ou } \theta = \pi$$

Stabilité de l'équilibre :

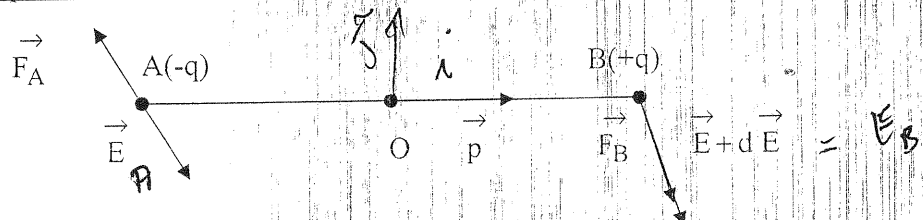
Les positions d'équilibre stables correspondent à E_p minimale : Si $\theta = 0$ alors $E_p = -pE$
Si $\theta = \pi$ alors $E_p = +pE$

\Rightarrow la seule position stable est $\theta = 0$. Ce moment tend à orienter le moment dipolaire électrique dans la direction et le sens du champ électrique extérieur appliqué.

2) Le dipôle étant placé maintenant dans un champ électrostatique extérieur quelconque.

a) Expression de la résultante de la force s'exerçant sur le dipôle :

b) Cas d'un champ non uniforme : Force résultante.



La résultante des forces appliquées sur le dipôle est non nulle : rotation + déplacement.

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_A} + \overrightarrow{F_B}$$

La taille du dipôle est très petite (10^{-10} m) devant la distance caractéristique des variations du champ électrostatique (1 m).

Pour des raisons de simplicité, nous effectuerons les calculs en coordonnées cartésiennes. Les résultats obtenus pourront cependant être considérés comme valables pour les autres systèmes de coordonnées.

→ Calculons la composante de cette force selon Ox : $F_x = q [E_x(B) - E_x(A)]$

Comme A et B sont proches en regard de la distance qui les sépare de la charge q , on peut effectuer un développement limité à l'ordre 1 :

$$E_x(B) = E_x(A) + (x_B - x_A) \frac{\partial E_x}{\partial x} + (y_B - y_A) \frac{\partial E_x}{\partial y} + (z_B - z_A) \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

Ce qui peut se réécrire :

$$F_x = q(x_B - x_A) \frac{\partial E_x}{\partial x} + q(y_B - y_A) \frac{\partial E_x}{\partial y} + q(z_B - z_A) \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + p_z \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

Du fait que le champ électrique est un vecteur à circulation conservative ($\text{rot } \vec{E} = 0$), on peut écrire :

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

Ce qui donne

$$F_x = p_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + p_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + p_z \frac{\partial E_z}{\partial x} = p \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial x}$$

On peut généraliser le résultat à F_y et F_z , d'où :

$$F_y = p \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial y} \quad \text{et} \quad F_z = p \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial z}$$

En général on peut exprimer la force résultante \vec{F} de la façon suivante

$$\vec{F} = q \vec{p} \cdot \text{grad}(\vec{E})$$

Il apparaît ainsi que la force exercée sur le dipôle dépend :

- de l'orientation du dipôle / variations du champ.
- des variations du champ : plus celles-ci sont importantes, plus la force exercée va être grande.

c) Expression du moment du couple agissant sur le dipôle :

On calcule le moment résultant de la force \vec{F} par rapport au point B :

$$\vec{M}/B = \vec{BA} \wedge \vec{F}_A = (\vec{AB} \wedge q \vec{E}) = \vec{p} \wedge \vec{E}$$

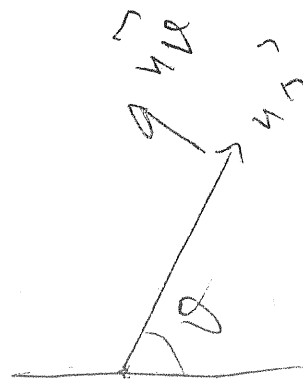
Quelque soit la nature du champ électrique appliqué, le moment résultant est égal à $\vec{p} \wedge \vec{E}$

$$\vec{r} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$E_1 = \frac{3 p_1 \Omega \cos \theta \cdot \vec{r} - \vec{r} \cdot \vec{r} \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 \vec{r}^3}$$

$$\frac{3 p_1 \Omega \cos \theta - \vec{r} \cdot \vec{r} \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 \vec{r}^3}$$

$$= \frac{2 p_1 \Omega \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 \vec{r}^3}$$



$E_{02} =$

$E_{01} =$

- d) Quelles sont les actions de ce couple et de la force résultante ? Existe-t-il une position d'équilibre du dipôle ?

Le couple tend à orienter le dipôle parallèlement au champ électrique. Lorsque le dipôle est parallèle et de même sens que le champ électrique le couple s'annule, il n'y a plus d'action en rotation.

- e) L'énergie potentielle du dipôle de moment électrique \vec{p} placé dans le champ \vec{E}_0 est :

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0 = -pE \cos \theta.$$

- 3) Le dipôle précédent \vec{p}_2 est placé maintenant dans le champ d'un autre dipôle \vec{p}_1

- a) Le dipôle de moment \vec{p}_1 crée en O_2 un champ électrique \vec{E}_1 :

$$\vec{E}_1 = \frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r} - r^2 \vec{p}_1}{4\pi\epsilon_0 r^5} \quad \text{avec } r = O_1O_2$$

composantes radiale : $E_{r1} = \frac{2p_1 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$; composante ortho radiale : $E_{\theta 1} = \frac{p_1 \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$

- b) L'énergie potentielle du dipôle de moment électrique \vec{p}_2 placé dans \vec{E}_1 est égale à :

$$E_p = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1.$$

$$\text{D'où } E_p = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1 = -\vec{p}_2 \cdot \left[\frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r} - r^2 \vec{p}_1}{4\pi\epsilon_0 r^5} \right] \Rightarrow E_p = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - \frac{3(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})(\vec{p}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} \right]$$

En reprenant l'orientation de \vec{p}_2 par l'angle $\phi = (O_1O_2, \vec{p}_2)$, il vient :

$$E_p = -\frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (2 \cos \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi)$$

- c) Positions d'équilibre

Elles sont données par les extremums de E_p par rapport aux deux variables θ et ϕ puisque E_p dépend de celles-ci.

$$\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = -\frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (-2 \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi)$$

$$\frac{\partial E_p}{\partial \phi} = -\frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} (-2 \cos \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \phi)$$

Donc $\frac{\partial E_p}{\partial \theta} = 0$ si $2 \sin \theta \cos \varphi = \cos \theta \sin \varphi$ (1)

$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = 0$ si $2 \cos \theta \sin \varphi = \sin \theta \cos \varphi$ (2)

Ce que s'écrit aussi $\text{tg} \varphi = 2 \text{tg} \theta$ et $\text{tg} \varphi = \frac{1}{2} \text{tg} \theta$ et les seuls cas où ces relations sont satisfaites sont :

(1) $\varphi = 0$ $\theta = 0$, $\theta = 0$ $\varphi = \pi$
 (2) $\theta = \frac{\pi}{2}$ $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\theta = \frac{\pi}{2}$

Il est à remarquer que lorsque la condition (1) est remplie, la condition (2) l'est aussi.

d) Stabilité des équilibres

Les positions d'équilibre stables correspondent à E_p minimale

(1) Si \vec{p}_1 et \vec{p}_2 sont alignés dans le même sens ($\theta = 0$ $\varphi = 0$), on a alors $E_p = -\frac{p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 r^3}$, les forces d'interaction sont attractives et E_p présente un minimum.

(2) Si \vec{p}_1 et \vec{p}_2 sont alignés de sens contraire ($\theta = 0$ $\varphi = \pi$), on a $E_p = +\frac{p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 r^3}$, les forces d'interaction sont répulsives et E_p présente un maximum.

(3) Si \vec{p}_1 et \vec{p}_2 sont côte à côte, parallèles et de même sens ($\theta = \frac{\pi}{2}$ $\varphi = -\frac{\pi}{2}$), on a $E_p = +\frac{p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 r^3}$, les forces d'interaction sont répulsives et E_p présente un maximum.

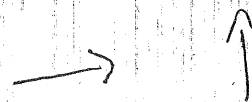
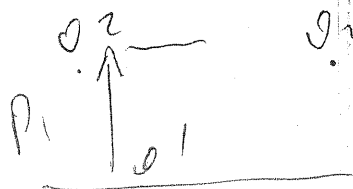
(4) Si \vec{p}_1 et \vec{p}_2 sont côte à côte, parallèles et de sens opposé ($\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\theta = \frac{\pi}{2}$), on a alors : $E_p = -\frac{p_1 p_2}{2\pi\epsilon_0 r^3}$, les forces d'interaction sont attractives et E_p présente un minimum.

e) Les seules positions d'équilibre stable sont donc ($\varphi = 0$, $\theta = 0$) et ($\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{2}$).

Exercice 2 : Un dipôle électrique formé d'un proton et d'un électron distants de $\ell = 0,53 \text{ \AA}$.

1) Le moment dipolaire électrique p de ce dipôle s'écrit $p = e \ell = 8,43 \cdot 10^{-30} \text{ C.m}$.

Et puisque $1 \text{ D} = 3,33 \cdot 10^{-30} \text{ C.m}$, on trouve que $p = 2,53 \text{ D}$ (Le debye (symbole D) est l'unité du moment dipolaire. Cette unité appartient au système d'unités CGS et ne fait pas partie du système d'unités SI)



- 2) L'énergie électrostatique E_i de ce dipôle est $E_i = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\ell} = -4,3 \cdot 10^{-18} \text{ J} = -27 \text{ eV}$. ✓
- 3) Le dipôle est placé dans un champ électrique extérieur de valeur $E_0 = 3 \cdot 10^6 \text{ V.m}^{-1}$. Le moment dipolaire s'oriente dans la même direction et le même sens que le champ électrique extérieur. ↕
- 4) L'énergie potentielle E_p du dipôle dans un champ électrique E_0 est donnée par l'expression : $E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_0$ (La démonstration est détaillée dans la question 1 de l'exercice (3). A.N. : $E_p = -2,55 \cdot 10^{-23} \text{ J} = -0,16 \text{ meV}$.)
- 5) $E_p \ll E_i \Rightarrow$ ce qui signifie que le champ électrique extérieur perturbe peu la cohésion du dipôle.

↪ Exercice 3 : Un condensateur plan a des armatures de surface S distante de e . On néglige les effets de bord et on lui applique une d.d.p U . L'espace entre les armatures est rempli par un diélectrique linéaire homogène de permittivité ϵ .

a) La capacité C du condensateur.

On insère un diélectrique entre les armatures d'un condensateur pour augmenter sa capacité. Un diélectrique est composé de dipôles électriques qui cherchent à s'orienter avec le champ électrique et l'orientation des dipôles crée un champ électrique opposé au champ électrique initial.

Le champ électrique total devient donc:

$$\vec{E} = \frac{\vec{E}_0}{\epsilon_r}$$

où E est le champ en présence du diélectrique, E_0 le champ sans diélectrique et ϵ_r la constante diélectrique.

Puisque le champ électrique à l'intérieur du diélectrique est diminué d'un facteur ϵ_r , on peut trouver comment varie la capacité du condensateur : $C = \frac{Q}{U}$

- le potentiel sans diélectrique $U_0 = E_0 \cdot e$
- le potentiel en présence du diélectrique $U = E \cdot e$

d'où $U = \frac{U_0}{\epsilon_r}$ et à charge constante on peut écrire $C_0 U_0 = CU \Rightarrow C = \epsilon_r C_0 = \frac{\epsilon S}{e}$

avec $C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{e}$ est la capacité sans diélectrique.

b) La densité de charges surfaciques de polarisation σ_p .

Le champ résultant $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p$, \vec{E}_p est le champ dépolarisant créé par les charges de polarisation, d'où $\frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} + \frac{\sigma_p}{\epsilon_0}$

ce qui donne $\sigma_p = \sigma \epsilon_0 \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_0} \right) = \sigma \left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1 \right)$

c) L'énergie emmagasinée W dans le diélectrique

$$W = \frac{1}{2} QU = \frac{Q^2}{2C} \text{ et on remplaçant } C \text{ par son expression } W = \frac{1}{2} QU = \frac{Q^2}{2\epsilon S} e$$

et la force qui s'exerce sur chaque armature : $F = -\frac{\partial W}{\partial e} = -\frac{Q^2}{2\epsilon S}$

d) Comparer les résultats avec celui du condensateur sans diélectrique.

L'énergie emmagasinée W sans diélectrique

$$W_0 = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} e = \epsilon_r W \Rightarrow W_0 > W$$

La force qui s'exerce sur chaque armature sans diélectrique :

$$F_0 = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} = \epsilon_r F \Rightarrow F_0 > F$$

Exercice 4 : Soit un volume diélectrique (l'h i i) de permittivité relative ϵ_r de forme sphérique.

de rayon R , placé dans un champ extérieur uniforme \vec{E}_0 .

On admettra que la polarisation \vec{P} est uniforme à l'intérieur de ce volume.

1) Calculer les densités de charges σ_p et ρ_p en un point M de la sphère.

2) Montrer que le champ dépolarisant \vec{E}_p créé par les charges de polarisations au centre

$$\text{de la sphère est égal à : } \vec{E}_p = \frac{1 - \epsilon_r}{2 + \epsilon_r} \vec{E}_0.$$

3) Etudier les cas $\epsilon_r = 1$ et $\epsilon_r = \infty$, et interpréter ces résultats.

4) Calculer le champ total \vec{E} à l'intérieur du diélectrique en fonction de ϵ_r et \vec{E}_0 .

5) Déterminer les vecteurs polarisation \vec{P} et excitation \vec{D} en tout point de la sphère en fonction de ϵ_r et \vec{E}_0 .

6) En admettant que le champ extérieur créé par les charges de polarisations est équivalent

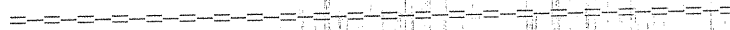
à celui d'un dipôle de moment $p = \frac{4}{3} \pi R^3 P$.

a) Donner les composantes du vecteur \vec{E}_p en un point $M(r, \theta)$ avec $r \gg R$.

b) En déduire alors le champ extérieur total \vec{E} en M.

c) Déterminer les vecteurs \vec{P}' et \vec{D}' à l'extérieur du diélectrique.

d) Les lois de continuité de \vec{E} et \vec{D} sont-elles respectées ? Justifier votre réponse.



TD d'Electricité 3

Série n° 2

Exercice 1 : Soit une sphère diélectrique (l h i) de permittivité absolue ϵ , de rayon R , possédant une polarisation de la forme $\vec{P} = \frac{\sigma_0 R}{r^2} \vec{r}$, placée dans le vide.

σ_0 est une constante positive et le centre de la sphère étant pris comme origine.

- Montrer qu'en général la somme algébrique des charges de polarisations est nulle.
- Montrer que l'existence des charges de polarisations volumiques Q_{pv} est nécessairement liée à l'existence des charges volumiques réelles.
- Calculer les densités de charges fictives de polarisations surfaciques σ_p et volumiques ρ_p .
- En déduire les charges de polarisations surfaciques Q_{ps} et volumiques Q_{pv} .
- En appliquant le théorème de Gauss, déterminer le vecteur induction électrique D en tout point de l'espace.
- En déduire le champ électrique E en tout point de l'espace.

Exercice 2 : Une sphère métallique de rayon R_1 est entourée par une couche sphérique de diélectrique linéaire, homogène et isotrope (lhi). Le rayon intérieur de cette couche sphérique est $R_1 = 2,5$ cm, le rayon extérieur $R_2 = 3,5$ cm, la permittivité diélectrique relative est $\epsilon_r = 3$. La sphère métallique porte la charge $+Q$. Il n'y a pas de charge libre dans le diélectrique. L'ensemble est supposé seul dans le vide, de permittivité absolue ϵ_0 .

- Déterminer le champ électrique \vec{E} en tout point de l'espace. Tracer la courbe de variation de E en fonction de r . Envisager trois cas : $r \leq R_1$; $R_1 \leq r \leq R_2$; $r \geq R_2$).
- Déterminer le vecteur polarisation \vec{P} en tout point de l'espace et tracer la courbe de variation $P(r)$.
- Calculer les densités de charges de polarisation en surface et en volume du diélectrique.

- 4) Calculer le potentiel $V(r)$ en tout point de l'espace et tracer la courbe de variation $V(r)$. On prendra $V(\infty) = 0$.
- 5) En déduire le potentiel V de la sphère métallique et calculer sa capacité C . Compare C à C_0 . (C_0 est la capacité qu'on obtiendrait en l'absence de la couche diélectrique).
A.N. : Calculer C et C_0 .
- 6) Calculer la charge maximum Q_{\max} que l'on peut communiquer à la sphère métallique sachant que la rigidité diélectrique du matériau est $E_{cl} = 300 \text{ kV.cm}^{-1}$.
(La rigidité diélectrique est la valeur de l'intensité du champ pour laquelle il y a claquage du milieu diélectrique). A.N. : Calculer Q_{\max} .

Exercice 3 : On considère dans le vide une sphère Σ de centre O et de rayon R , constituée par un diélectrique rigide polarisé de la façon suivante : en point de la sphère, la polarisation est radiale et son intensité P a la même valeur en tous les points de Σ ($\vec{P} = P \vec{e}_r$).

Dans la base orthonormée ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$) un point M ($OM = r$) de l'espace sera repéré par ses coordonnées sphériques (r, θ, φ).

- 1) Quelles sont les charges fictives de polarisation et quelle est leur somme algébrique totale ?
- 2) En déduire le champ électrique puis le potentiel, en un point quelconque de l'espace. On prendra $V(\infty) = 0$.
- 3) Calculer directement le potentiel en un point quelconque à partir de méthodes générales de l'électrostatique (équation de Poisson...).
- 4) Déterminer l'énergie électrostatique E_{el} de cette sphère diélectrique.
- 5) Le champ dans le diélectrique serait-il modifié si une cavité sphérique, de rayon R_1 et de centre O , était creusée dans le diélectrique.

=====

TD d'Electricité 3
 Correction Série n° 2

Exercice 1 : Soit une sphère diélectrique (l.h.i) de permittivité absolue ϵ , de rayon R , possédant une polarisation de la forme $\vec{P} = \frac{\sigma_0 R}{r^2} \vec{r}$, placée dans le vide.

σ_0 est une constante positive et le centre de la sphère étant pris comme origine.

a) Le diélectrique polarisé est équivalent à des charges de polarisation, charges fictives réparties dans le diélectrique avec la densité volumique $\rho_p = -\text{div } \vec{P}$ et à sa

surface avec la densité superficielle $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$ (\vec{n} est la normale à la surface S).

On calcule la somme algébrique des charges de polarisation Q_p et en utilisant le théorème d'Ostogradsky, on obtient :

$$Q_p = \iiint_V \rho_p d\tau + \iint_S \sigma_p dS = \iiint_V -\text{div } \vec{P} d\tau + \iint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = 0$$

Conclusion : La somme algébrique des charges fictives de polarisation est nulle

b) Les relations locales du théorème de Gauss entre le champ électrique \vec{E} et \vec{D} et la densité volumique de charges réelles ρ s'écrit à l'intérieur du diélectrique :

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \text{div } \vec{D} = \rho$$

Dans un diélectrique l.h.i, on retrouve comme conséquence les deux vecteurs sont aussi proportionnels et de même sens.

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

et

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$$

$$\Rightarrow \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

$$\text{d'où} \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon}$$

ce qui donne

$$\frac{\rho}{\epsilon} = \frac{\rho + \rho_p}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \rho_p = \rho \left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1 \right)$$

$$Q_{pv} = Q_v \left(\frac{1}{\epsilon_r} - 1 \right)$$

Donc l'existence des charges de polarisations volumiques Q_{pv} est nécessairement liée à l'existence des charges volumiques réelles.

c) Calcul les densités de charges de polarisations surfaciques σ_p et volumiques ρ_p .

a. Densité superficielle de polarisation σ_p sur la surface du diélectrique

Connaissant le vecteur polarisation en tout point de l'espace on peut écrire que à $r = R$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n} \quad \text{avec} \quad \vec{P} = \frac{\sigma_0 R}{r} \vec{e}_r$$

$$\text{or} \quad \vec{e}_r = \vec{n} \quad \Rightarrow \quad \sigma_p = \sigma_0 = \text{Cte}$$

➤ Densité volumique de charges de polarisation ρ_p .

$$\text{Par définition } \rho_p = -\text{div } \vec{P} \quad \text{ce qui donne} \quad \rho_p = -\text{div } \vec{P} = -\text{div } \frac{\sigma_0 R}{r^2} \vec{r} \quad \text{d'où} \quad \rho_p = -\frac{\sigma_0 R}{r^2}$$

La densité de charges de polarisation en volume n'est pas uniforme, elle dépend de r .

d) Charges de polarisations

$$\text{a. Surfaciques } Q_{sp}: \quad \sigma_p = \sigma_0 \quad \text{d'où} \quad Q_{ps} = 4\pi R^2 \sigma_0$$

$$\text{b. Volumiques } Q_{pv}: \quad \rho_p = -\frac{\sigma_0 R}{r^2} \quad \text{et la charge} \quad Q_{pv} = -\int_0^R 4\pi r^2 \rho_p dr$$

$$\text{D'où} \quad Q_{pv} = -4\pi R^2 \sigma_0$$

e) Le vecteur le déplacement électrique \vec{D} pour $r < R$ et $r > R$.

a. $r > R$: On applique le théorème de Gauss sur une surface (S) de même centre que le diélectrique et de rayon r . Le flux de \vec{D} à travers cette surface est égal à la somme des charges intérieures de (S) :

$$\phi = \oint_S \vec{D}_0 \cdot d\vec{S} = Q_v \quad \text{avec} \quad Q_v = Q_{pv} \left(\frac{\epsilon_r}{1 - \epsilon_r} \right) \quad \text{et} \quad Q_{pv} = -4\pi R^2 \sigma_0$$

$$\vec{D}_0 = D_0 \vec{e}_r \quad d\vec{S} = dS \cdot \vec{e}_r \quad \text{et} \quad \text{puisque } D \text{ ne dépend que de } r \text{ ce qui donne :}$$

$$\vec{D}_0 = \frac{Q_v}{4\pi r^2} \vec{e}_r = \frac{\epsilon_r \sigma_0}{(\epsilon_r - 1)} \frac{R^2}{r^2} \vec{e}_r$$

b. $r < R$: de la même manière que dans le cas a), le théorème de Gauss nous donne :

$$\phi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho d\tau = \int_0^R \rho_p \frac{\epsilon_r}{(1-\epsilon_r)} 4\pi r^2 dr = \int_0^R \frac{\sigma_0 R}{r^2} \frac{\epsilon_r}{(\epsilon_r-1)} 4\pi r^2 dr = 4\pi\sigma_0 R \frac{\epsilon_r}{(\epsilon_r-1)} r$$

avec la densité volumique $\rho = \rho_p \left(\frac{\epsilon_r}{1-\epsilon_r} \right)$ d'où $\vec{D} = \frac{\epsilon_r \sigma_0}{(\epsilon_r-1)} \frac{R}{r} \vec{e}_r$

f) Le champ électrique \vec{E} pour $r < R$ et $r > R$.

$r > R$: $\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0 \vec{e}_r$ et puisque E ne dépend que de r ce qui donne :

$$\vec{E}_0 = \frac{\epsilon_r \sigma_0}{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1)} \frac{R^2}{r^2} \vec{e}_r$$

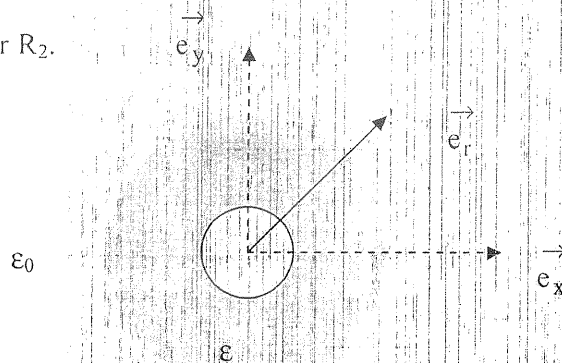
$r < R$: de la même manière que dans le cas précédent $\vec{D} = \epsilon \vec{E} \vec{e}_r$

d'où $\vec{E} = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1)} \frac{R}{r} \vec{e}_r$

Exercice 2 : Système est constitué de :

- Une sphère métallique de rayon R_1 porte la charge $+Q$
- Une couche sphérique de diélectrique (l.h.i) qui entoure la sphère de rayon intérieur

R_1 et de rayon extérieur R_2 .



1) Calcul du champ électrique \vec{E} en tout point de l'espace.

On détermine tout d'abord les caractéristiques du vecteur le déplacement électrique \vec{D} et on note \vec{D}' , \vec{D} et \vec{D}_0 respectivement les vecteurs déplacement dans la sphère métallique, le diélectrique et le vide.

- a. $r \leq R_1$: On applique le théorème de Gauss sur une surface (S) de même centre que la sphère métallique de rayon r. Le flux de \vec{D} à travers cette surface est égal à la somme des charges intérieures de (S)
- $$\phi = \oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{D} = D' \vec{e}_r \quad d\vec{S} = dS \cdot \vec{e}_r$$

\Rightarrow Dans la sphère métallique $\vec{D}' = \vec{0}$ d'où $\vec{E}' = \vec{0}$

- b. $R_1 \leq r \leq R_2$: de la même manière que dans le cas précédent, et puisque D ne dépend que de r le théorème de Gauss nous donne :
- $$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r \quad \text{et nous avons milieu (l.h.i)} : \vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

D'où
$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \vec{e}_r$$

- c. $r \geq R_2$: Théorème de Gauss $\Rightarrow \vec{D}_0 = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r$ et $\vec{E}_0 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

2) On déduit le vecteur polarisation \vec{P} en tout point de l'espace.

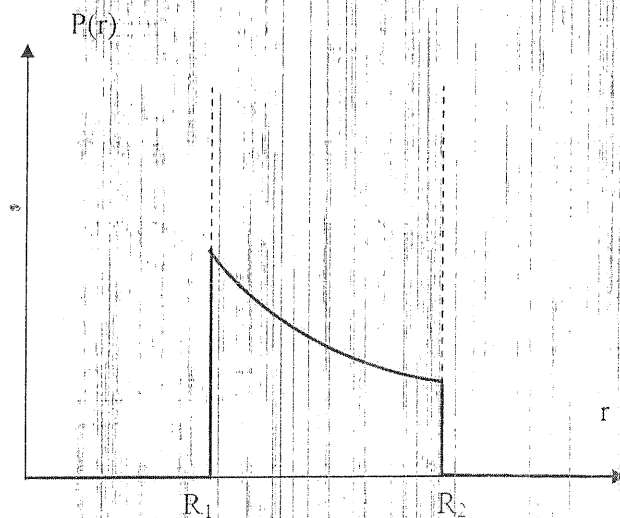
Puisque le milieu est homogène isotrope (lhi) : $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$

a. $r \leq R_1$: $\vec{P}' = \vec{0}$

b. $R_1 \leq r \leq R_2$: $\vec{P} = \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \vec{e}_r$

c. $r \geq R_2$: Dans le vide, il n'y a pas de polarisation.

La courbe de variation de P en fonction de r



3) Il existe des charges de polarisation uniquement dans le milieu diélectrique

✓ La densité volumique de charges de polarisation ρ_p dans le diélectrique

Par définition $\rho_p = -\text{div } \vec{P}$ d'où $\rho_p = -\text{div} \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \vec{e}_r = 0$

Donc il n'y a pas de charges de polarisation en volume.

✓ La densité superficielle de polarisation σ_p sur la surface du diélectrique

- Surface intérieur ($r = R_1$)

par définition nous avons $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$ avec $\vec{P} = \frac{Q}{4\pi r^2} \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} \vec{e}_r$

or $\vec{n} = -\vec{e}_r \Rightarrow \sigma_{p1} = -\frac{Q}{4\pi R_1^2} \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} < 0$

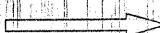
- Surface extérieur ($r = R_2$)

nous avons $\vec{n} = \vec{e}_r \Rightarrow \sigma_{p2} = \frac{Q}{4\pi R_2^2} \frac{(\epsilon_r - 1)}{\epsilon_r} > 0$

4) Calcul du potentiel $V(r)$ en tout point de l'espace : $\vec{E} = -\text{grad } V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r$

a. $r \leq R_1$: $\vec{E}' = 0$  $V' = K_0 = \text{Cte}$

b. $R_1 \leq r \leq R_2$: $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_r r^2} \vec{e}_r$  $V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_r r} + K_1$ ($K_1 = \text{Cte}$)

c. $r \geq R_2$: $\vec{E}_0 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$  $V_0 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} + K_2$ ($K_2 = \text{Cte}$)

Calcul des constantes K_0 , K_1 et K_2 . Si On prendra $V(\infty) = 0$

i. $V_0 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r} \Rightarrow K_2 = 0$

ii. Continuité de $V(r)$ à la surface extérieur du diélectrique $\Rightarrow V_0(R_2) = V(R_2)$

Ce qui donne $\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R_2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_r R_2} + K_1 \Rightarrow K_1 = \frac{Q}{4\pi R_2} \left[\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon} \right]$

iii. Continuité de $V(r)$ à la surface intérieur du diélectrique $\Rightarrow V'(R_1) = V(R_1)$

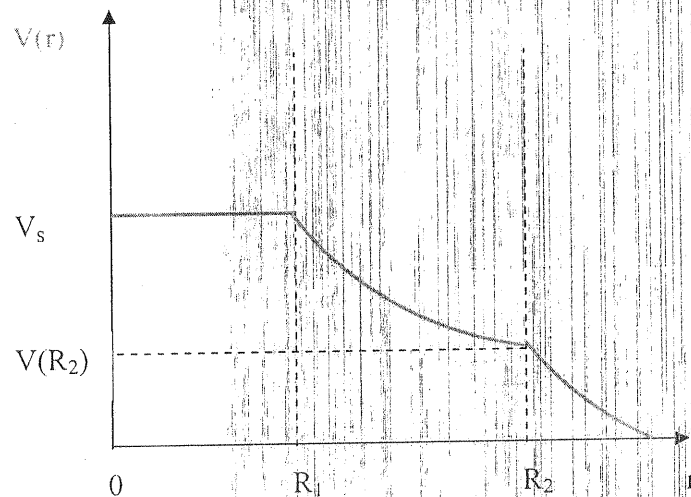
Ce qui donne $K_0 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_r R_1} + K_1 \Rightarrow K_0 = \frac{Q}{4\pi \epsilon_r R_1} + \frac{Q}{4\pi R_2} \left[\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon} \right]$

5) Le potentiel de la sphère métallique est $V_s = \frac{Q}{4\pi\epsilon R_1} + \frac{Q}{4\pi R_2} \left[\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon} \right]$

Et sa capacité $C = \frac{Q}{V_s} \Rightarrow C = \frac{4\pi\epsilon R_1 R_2}{R_2 + R_1(\epsilon_r - 1)}$ et $C_0 = 4\pi\epsilon R_1$

D'où $C > C_0$ A.N. : $C = 3,43 \text{ pF}$ et $C_0 = 2,7 \text{ pF}$

i. La courbe de variation $V(r)$.



6) Calcul de la charge maximum Q_{\max} que l'on peut communiquer à la sphère métallique sachant que la rigidité diélectrique du matériau est $E_{cl} = 300 \text{ kV.cm}^{-1}$.

$$V_s(R_1) = R_1 \cdot E_{cl} = 7,5 \text{ kV} \Rightarrow Q_{\max} = C \cdot V_s(R_1) = C \cdot R_1 \cdot E_{cl} = 2,57 \cdot 10^{-8} \text{ C}$$

Exercice 3 : Sphère Σ de centre O et de rayon R, constituée par un diélectrique rigide de polarisation est radiale et son intensité P a la même valeur en tous les points de Σ ($\vec{P} = P \vec{e}_r$).

1) Charges fictives de polarisation

➤ La densité superficielle de polarisation σ_p sur la surface du diélectrique ($r = R$)

Par définition nous avons $\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$ avec $\vec{P} = P \vec{e}_r$ et $\vec{n} = \vec{e}_r \Rightarrow \sigma_p = P > 0$

➤ La densité volumique de charges de polarisation ρ_p dans le diélectrique

Par définition $\rho_p = -\text{div } \vec{P}$ d'où $\rho_p = -\text{div } P \vec{e}_r = 0 \Rightarrow \rho_p = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P)$

$$\text{D'où } \rho_p = -\frac{2P}{r}$$

La somme algébrique totale des charges de polarisation

a. Surfaciques Q_{sp} : $\sigma_p = P$ d'où $Q_{ps} = 4\pi R^2 P$

b. Volumiques Q_{pv} : $\rho_p = -\frac{2P}{r}$ et la charge $Q_{pv} = -\int_0^R 4\pi r^2 \rho_p dr$

D'où $Q_{pv} = -4\pi R^2 P$ et $Q_p = Q_{ps} + Q_{pv} = 0$

2) Le champ électrique pour $r < R$ et $r > R$.

c. $r > R$: On applique le théorème de Gauss sur une surface (S) de même centre que le diélectrique et de rayon r. Le flux de \vec{E} à travers cette surface est égal à la somme des charges intérieures de (S) :

$$\phi = \oiint_S \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{pv} + Q_{ps}}{\epsilon_0} \quad \text{avec} \quad Q_p = 0 \quad \text{et} \quad \vec{E}_0 = \vec{0}$$

d. $r < R$: de la même manière, le théorème de Gauss nous donne :

$$\phi = \oiint_S \vec{E}_1 \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho_p d\tau = \int_0^r -\frac{2P}{r} 4\pi r^2 dr = -4\pi \frac{P}{\epsilon_0} r^2 \Rightarrow \vec{E}_1 = -\frac{P}{\epsilon_0} \vec{e}_r$$

Potentiel électrique $V(r)$ en tout point de l'espace

On note (\vec{E}_1, V_1) à l'intérieur de la sphère et (\vec{E}_0, V_0) à l'extérieur et $\vec{E} = -\text{grad } V$

a. $r \geq R$: $\vec{E}_0 = \vec{0} \Rightarrow V_0 = K_0 = \text{Cte}$

b. $r \leq R$: $\vec{E}_1 = -\frac{P}{\epsilon_0} \vec{e}_r \Rightarrow V_1 = \frac{P}{\epsilon_0} r + K_1 \quad (K_1 = \text{Cte})$

Calcul des constantes K_0 et K_1 . Si On prendra $V(\infty) = 0$

i. $V_0 = 0 \Rightarrow K_0 = 0$

ii. Continuité de $V(r)$ à la surface du diélectrique $\Rightarrow V_0(R) = V_1(R)$

Ce qui donne $K_1 = -\frac{P}{\epsilon_0} R \Rightarrow V_1 = \frac{P}{\epsilon_0} (r - R)$

3) Calcul direct du potentiel à partir de l'équation de Poisson

En utilisant l'équation de Poisson : $\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{dV}{dr}) = -\frac{\rho_p}{\epsilon_0}$

c. $r \geq R$: $\Delta V_0 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{dV}{dr}) = 0 \Rightarrow V_0 = -\frac{K_2}{r}$

K_2 est une constante et le potentiel est pris nul à l'infini

$$d. \quad r \leq R \quad : \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right) = \frac{2P}{\epsilon_0 r} \quad \Rightarrow \quad V_1 = \frac{P}{\epsilon_0} r - \frac{K_3}{r} + K_4$$

K_3 et K_4 sont des constantes. Le potentiel devant être partout défini, en particulier pour $r = 0$ d'où la constante $K_3 = 0$. De même le potentiel est continue en tout point :

$$V_1(R) = \frac{P}{\epsilon_0} R + K_4 = V_0(R) = -\frac{K_2}{R}$$

Calcul des constantes K_2 et K_4 :

Composante normale de \vec{D} est continue d'où $\epsilon_0 \frac{dV_0}{dr} = \epsilon_0 \frac{dV}{dr} + P$

En faisant les calculs on trouve :

$$\epsilon_0 \frac{K_2}{R^2} = -\epsilon_0 \frac{P}{\epsilon_0} + P = 0 \quad \text{d'où} \quad K_2 = 0 \quad \text{et} \quad K_4 = -\frac{P}{\epsilon_0} R$$

Ce qui donne un potentiel électrique : $V_1 = \frac{P}{\epsilon_0} (r - R)$

4) Energie électrostatique E_{el} de cette sphère diélectrique.

$$E_{el} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_0^{+\infty} E^2 d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_0^R E_1^2 d\tau = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_0^R \frac{P^2}{\epsilon_0^2} 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi P^2 R^3}{3\epsilon_0}$$

5) Si on creuse dans le diélectrique une cavité sphérique, de rayon R_1 et de centre O

- i. pour $r < R_1$: Champ dans la cavité creuse est nul
- ii. pour $R_1 < r < R$: La symétrie sphérique étant conservée, la polarisation est toujours radiale et la densité volumique de charge reste inchangée.

Les distributions surfaciques :

$$- r = R_1 \quad : \quad \sigma_1 = -P$$

$$- r = R \quad : \quad \sigma_1 = +P \text{ (inchangé)}$$

=====

TD d'Electricité 3

Série n° 3

Exercice 1 : On considère une spire circulaire C de centre O de rayon R parcourue par un courant d'intensité I. Cette spire crée en un point M de l'espace ($\vec{OM} = r \vec{e}_r$) un champ magnétique \vec{B} .

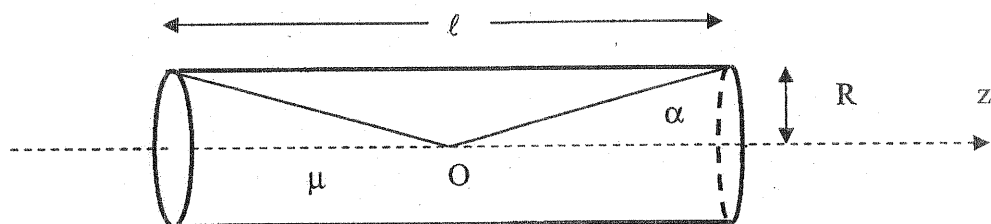
- Montrer que le champ magnétique \vec{B} est à flux conservatif.
- Déduire l'existence d'un potentiel vecteur \vec{A} que l'on calculera.
- Montrer que le potentiel vecteur \vec{A} crée en M par la spire (précisément, à des distances grandes comparées à la taille de la spire ($r \gg R$)) peut s'écrire sous la forme vectorielle :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad \text{Avec et } \vec{m} = I \vec{S}$$

- \vec{m} est le vecteur moment magnétique de la spire. \vec{S} est la surface qui s'appuie sur la spire.
- En déduire l'expression vectorielle du champ magnétique \vec{B} .
- Déterminer les composantes radiale B_r et orthoradiale B_θ du champ magnétique.

Exercice 2 : On considère un barreau cylindrique de longueur ℓ aimanté uniformément suivant son axe Oz par une aimantation \vec{M} (figure ci-dessous)

Ses faces terminales qui sont des sections droites de rayon R sont vues du centre O sous l'angle α . Le barreau est constitué d'une matière magnétique de perméabilité constante μ .



- Déterminer les densités de courants d'aimantation \vec{j}_{as} et \vec{j}_{av} .
- Montrer que le barreau aimanté est équivalent à une nappe cylindrique de courants.

- 3) Déterminer les vecteurs \vec{B}_d et \vec{H}_d créés au centre du barreau.
- 4) Etudier les cas limites : $\ell \ll R$ (disque) et $\ell \gg R$ (barreau).

Exercice 3

Une petite sphère homogène en acier de perméabilité μ_r , de centre O et de rayon R est placée dans le vide. Cette sphère aimantée possède un moment magnétique \vec{m} , et caractérisé par le vecteur aimantation \vec{M} uniforme.

- 1) Déterminer, en fonction de \vec{m} et de R, le champ magnétique \vec{B}_d créé au centre O de la sphère aimantée.
- 2) Déterminer en tout point extérieur éloigné de la sphère en fonction de l'aimantation \vec{M} .
 - les composantes radiale et ortho radiale de $\vec{B}_d(r)$
 - le module du champ B_d en M.

On repérera la position du point M de l'espace par $r = OM$ et l'angle $\theta = (\vec{m}, \vec{r})$.

Exercice 4 : Un long cylindre d'axe Oz et de rayon R porte une aimantation \vec{M} de la forme $\vec{M} = kr^2 \vec{e}_\theta$, r est la distance par rapport à l'axe du cylindre, et k est une constante.

- a) Quelle est la dimension de k ?
- b) Calculer les densités de courants d'aimantation surfacique \vec{j}_{as} et volumique \vec{j}_{av} .
- c) Calculer le champ magnétique \vec{B}_d dû à l'aimantation en tout point de l'espace.
- d) Vérifier la relation de passage à travers la surface du cylindre magnétique.

On donne l'expression du rotationnel d'un champ de vecteur A en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\theta & A_z \end{vmatrix}$$

Exercice 1:

a) Le flux est conservatif.

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

ostrogadsky

$$\iiint_{(V)} \text{div } \vec{B} \, dV = 0$$

$$\Rightarrow \text{div } \vec{B} = 0$$

Loi de Biot et Savart

$$\vec{B}(\Pi) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{(C)} \frac{I d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{(\Pi)^3}$$

$$R \ll r \Rightarrow \Pi \approx r \Rightarrow \vec{r} = r \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\Pi) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

$$\text{div } \vec{B}(\Pi) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \text{div} \left(\frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3} \right)$$

$$\text{div}(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{rot } \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot } \vec{b}$$

$$\text{div} \left(\frac{d\vec{\ell} \wedge \vec{r}}{r^3} \right) = \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \text{rot } d\vec{\ell} - d\vec{\ell} \cdot \text{rot} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right)$$

$$\text{rot } d\vec{\ell} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$$\text{rot} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -\text{grad} \frac{1}{r}$$

$$\Rightarrow \text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \text{flux de } \vec{B} \text{ conservatif.}$$

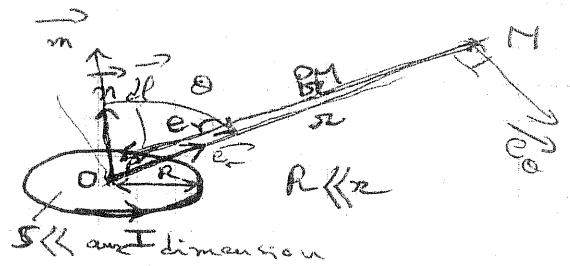
b) $\text{div } \vec{B} = 0 \Rightarrow \exists \vec{A}$ tel que $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ → potentiel vectoriel de \vec{B}

$$\vec{B}(\Pi) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C d\vec{\ell} \wedge \text{grad} \frac{1}{r}$$

$$\text{rot} \left(\frac{d\vec{\ell}}{r} \right) = \frac{1}{r} \text{rot } d\vec{\ell} - d\vec{\ell} \wedge \text{grad} \frac{1}{r}$$

$$\vec{B}(\Pi) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \text{rot} \left(\frac{d\vec{\ell}}{r} \right) = \text{rot} \left(\underbrace{\frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{\ell}}{r}}_{\vec{A}} \right)$$

$$\Rightarrow \vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{\ell}}{r}$$



$$m = I S \vec{n}$$

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{d\theta}$$

$$\vec{m} = m \cos \theta \vec{e}_r - m \sin \theta \vec{e}_\theta$$

$$\vec{r} = r \vec{e}_r$$

c)

$$\text{Th de Stokes} \Rightarrow \int_{(c)} \vec{V} \cdot d\vec{t} = \iint_S \text{rot } \vec{V} \cdot d\vec{S}$$

soit \vec{u} un vecteur ct

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \frac{\vec{u}}{r} \cdot d\vec{t} \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_S \text{rot}_0 \left(\frac{\vec{u}}{r} \right) \cdot d\vec{S} \end{aligned}$$

$$\text{rot}_0 \left(\frac{\vec{u}}{r} \right) = \frac{1}{r} \text{rot}_0 \vec{u} - \vec{u} \wedge \text{grad}_0 \frac{1}{r}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_S \left(\vec{u} \wedge \text{grad}_0 \frac{1}{r} \right) \cdot d\vec{S}$$

$$(\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) \cdot \vec{V}_3 = (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) \cdot \vec{V}_1$$

$$\Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{A}(\vec{r}) = - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_S \left(\text{grad}_0 \frac{1}{r} \wedge d\vec{S} \right) \cdot \vec{u}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint_S d\vec{S} \wedge \text{grad}_0 \frac{1}{r}$$

$$\text{grad}_0 \frac{1}{r} \text{ reste presque etc sur } (S) \text{ (faible)} \quad I \cdot \iint_S d\vec{S} \cdot \vec{m} = I \cdot \vec{m}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{m} \wedge \text{grad}_0 \frac{1}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

d)

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot}_{\vec{r}} \vec{A}(\vec{r})$$

$$\vec{m} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} = - \vec{m} \wedge \text{grad}_{\vec{r}} \frac{1}{r}$$

$$\text{rot} \left(\frac{\vec{m}}{r} \right) = \frac{1}{r} \text{rot}_{\vec{r}} \vec{m} - \vec{m} \wedge \text{grad}_{\vec{r}} \frac{1}{r}$$

$$\vec{m} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} = \text{rot} \left(\frac{\vec{m}}{r} \right)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \left(\text{rot} \left(\frac{\vec{m}}{r} \right) \right)$$

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{V}) = \text{grad}(\text{div } \vec{V}) - \Delta \vec{V}$$

$$\text{rot} \left(\text{rot} \frac{\vec{m}}{r} \right) = \text{grad} \left(\text{div} \frac{\vec{m}}{r} \right) - \Delta \left(\frac{\vec{m}}{r} \right)$$

$$\text{div} \left(\frac{\vec{m}}{r} \right) = \frac{1}{r} \text{div } \vec{m} + \vec{m} \cdot \text{grad} \frac{1}{r} = - \frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

$$\Delta\left(\frac{\vec{m}}{r}\right) = \vec{m} \Delta\left(\frac{1}{r}\right)$$

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

$$\frac{1}{r} = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{rot}(\text{rot}\left(\frac{\vec{m}}{r}\right)) = \text{grad}\left(\frac{-\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}\right)$$

$$- \text{grad}\left(\frac{\vec{m} \cdot \vec{r}}{r^3}\right) = - \frac{1}{r^3} \underbrace{\text{grad}(\vec{m} \cdot \vec{r})}_{\vec{m}} - (\vec{m} \cdot \vec{r}) \underbrace{\text{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right)}_{-\frac{3\vec{r}}{r^5}}$$

$$\oplus \text{grad}(\vec{u} \cdot \vec{r}) = \vec{u}$$

$$\vec{m} = m_x \vec{e}_x + m_y \vec{e}_y + m_z \vec{e}_z$$

$$\vec{m} \cdot \vec{r} = m_x \cdot x + m_y \cdot y + m_z \cdot z$$

$$\text{grad}(\vec{m} \cdot \vec{r}) = m_x \vec{e}_x + m_y \vec{e}_y + m_z \vec{e}_z = \vec{m}$$

$$= 3 \frac{(\vec{m} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} \left[3(\vec{m} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r} - r^2 \vec{m} \right]$$

$$\downarrow$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^5} \left[3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{r} - r^2 \vec{p} \right]$$

e)

$$\vec{m} \cdot \vec{r} = m r \cos \theta$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^5} \left[3m r^2 \cos \theta \vec{e}_r - r^2 m \cos \theta \vec{e}_r + r^2 m \sin \theta \vec{e}_\theta \right]$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \left[2m \cos \theta \vec{e}_r + m \sin \theta \vec{e}_\theta \right]$$

$$\Rightarrow B_r(r) = \frac{\mu_0 m \cos \theta}{2\pi r^3}, \quad B_\theta(r) = \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^3}$$

par analogie

$$\begin{cases} E_r(r) = \frac{2 p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \\ E_\theta(r) = \frac{p \sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3} \end{cases}$$

Exercice 2.3

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{\nabla} \times \vec{M} \wedge \vec{n}$$

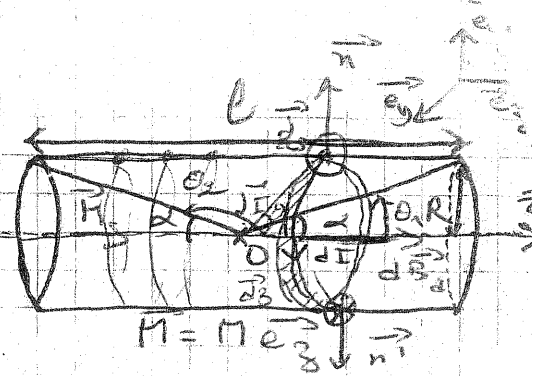
$$\vec{J}_{av} = \vec{\nabla} \times \vec{M}$$

$$[\vec{J}_{av}] = [\vec{M}] = \frac{[m]}{m^3} = \frac{A \cdot m^2}{m^3} = A/m$$

$$[\vec{J}_{av}] = \frac{[\vec{M}]}{m} = A/m^2$$

$$\vec{J}_{av} = M \vec{e}_z \wedge \vec{n} = M \vec{e}_y$$

$$\vec{J}_{av} = \vec{\nabla} \times \vec{M} = \vec{0} \quad (\vec{M} \text{ uniforme})$$

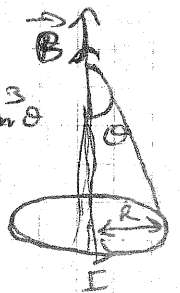


- 2/ les courants d'aimantations sont uniquement surfacique
 ⇒ une nappe de courant
 ⇒ barreau aimanté ⇒ un solénoïde.

3/

considérons une spire élémentaire de rayon R et d'épaisseur dz

$$B(P) = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \theta$$



parcourue par le courant $dI = J_{av} dz$

⇒ $dI = M dz$, cette spire crée le champ

$$d\vec{B}_d(P) = \frac{\mu_0 dI}{2R} \sin^3 \theta \vec{e}_z$$

$$d\vec{B}_d(P) = \frac{\mu_0 M dz}{2R} \sin^3 \theta \vec{e}_z$$

$$\tan \theta = \frac{R}{z} \Rightarrow dz = -\frac{R}{\sin^2 \theta} d\theta ; dz > 0 \Rightarrow d\theta < 0$$

$$d\vec{B}_d(P) = -\frac{\mu_0 M}{2} \sin \theta d\theta \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \vec{B}_d(P) = -\frac{\mu_0 M}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta \vec{e}_z$$

$\theta_1 = \alpha$
 $\theta_2 = \pi - \alpha$
 $\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} \sin \theta d\theta = [-\cos \theta]_{\alpha}^{\pi-\alpha} = -2\cos \alpha$

$$\vec{B}_d(P) = \mu_0 M \cos \alpha \vec{e}_z$$

$$\cos \alpha = \frac{R/2}{\sqrt{R^2 + \frac{l^2}{4}}} = \frac{R}{\sqrt{4R^2 + l^2}}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_d(P) = \mu_0 M \frac{R}{\sqrt{4R^2 + l^2}} \vec{e}_z$$

$$\vec{H}_d = \frac{\vec{B}_d}{\mu_0} - \vec{M} \quad \left(\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \left(\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} \right) \quad (\text{h.r.})$$

$$\vec{H}_d = \vec{M} \left(\frac{l}{\sqrt{4R^2 + l^2}} - 1 \right)$$

4/

* $l \ll R$ (disque)

$$\begin{cases} \vec{B}_d(0) \approx \vec{0} \\ \vec{H}_d \approx -\vec{M} \end{cases}$$

* $l \gg R$ (Barreau infini)

$$\vec{B}_d(0) \approx \mu_0 \vec{M}$$

$$\vec{H}_d(0) \approx \vec{0}$$

- Exercice 30

$$\begin{cases} \vec{M} = \frac{\vec{m}}{\text{volume}} = \frac{3\vec{m}}{4\pi R^3} \\ \vec{m} = \frac{4\pi R^3}{3} \vec{M} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{J}_{as} &= \vec{M} \wedge \vec{n} \\ &= M \vec{e}_n \wedge \vec{n} = M \sin \theta \vec{e}_\theta \end{aligned}$$

$$\vec{J}_{av} = \text{rot } \vec{M} = \vec{0} \quad (\vec{M} \text{ uniforme})$$

considérons une spire élémentaire de rayon $a = R \sin \theta$ et d'épaisseur $R d\theta$, parcourue par le courant

$$dI = \vec{J}_{as} \cdot R d\theta$$

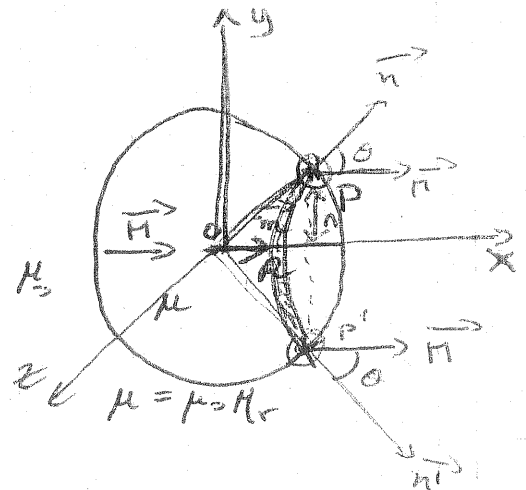
$$\Rightarrow dI = MR \sin \theta d\theta$$

$$\text{crée le champ } dB_d(0) = \frac{\mu_0 dI}{2R} \sin^3 \theta$$

$$dB_d(0) = \frac{\mu_0 (MR \sin \theta d\theta)}{2R \sin \theta} \sin^3 \theta \vec{e}_n$$

$$dB_d(0) = \frac{\mu_0 M}{2} \sin^3 \theta d\theta$$

$$\vec{B}_d(0) = \frac{\mu_0 \vec{M}}{2} \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$



$$\sin^3 \theta = \sin \theta \quad \cos^2 \theta = (\sin \theta (1 - \cos^2 \theta))$$

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi \sin \theta d\theta - \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$$

$$[-\cos \theta]_0^\pi - \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3}\right]_0^\pi = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \vec{B}_d(\theta) = \frac{2}{3} \mu_0 \vec{M}$$

$$\Rightarrow B_d(0) = \frac{\mu_0 m}{2\pi R^3}$$

2)

sphère \equiv dipôle magnétique de moment \vec{m}

$$B_r(r) = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \cdot 2m \cos \theta$$

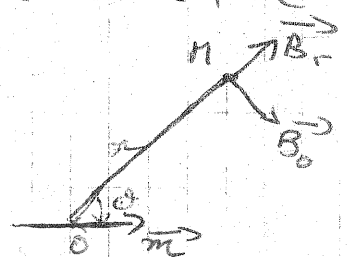
$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 m \sin \theta}{4\pi r^3}$$

$$\Rightarrow B_r(r) = \frac{2\mu_0 m \cos \theta}{3} \left(\frac{R}{r}\right)^3$$

$$\Rightarrow B_\theta(r) = \frac{\mu_0 m \sin \theta}{3} \left(\frac{R}{r}\right)^3$$

$$B = \sqrt{B_r^2 + B_\theta^2} = \frac{\mu_0 m}{3} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \sqrt{4\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

$$B = \frac{\mu_0 m}{3} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \sqrt{1 + 3\cos^2 \theta}$$



EX 4

a)

$$[M] = \frac{A}{m} = k m^2$$

$$\Rightarrow [K] = A/m^3$$

b)

$$\vec{j}_{as} = \vec{M} \wedge \vec{n}$$

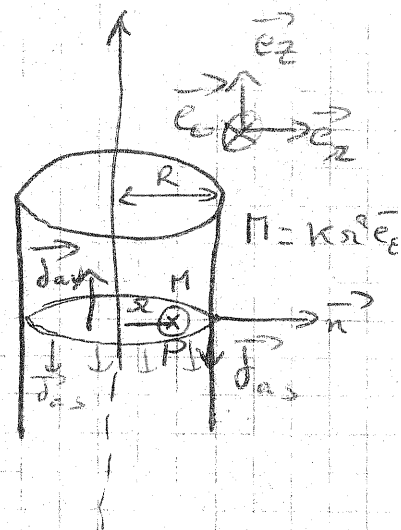
$$= KR^2 \vec{e}_\theta \wedge \vec{e}_r$$

$$\vec{j}_{as} = -KR^2 \vec{e}_z$$

$$\vec{j}_{av} = \text{rot } \vec{\pi}$$

$$\text{rot } \vec{\pi} = \nabla \wedge \vec{\pi}$$

$$= \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \frac{\partial}{\partial r} \\ r\vec{e}_\theta & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \vec{e}_z & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix} \wedge \vec{\pi} \quad \text{with } \vec{\pi} = k r \vec{e}_\theta = \pi_\theta(r) \vec{e}_\theta$$



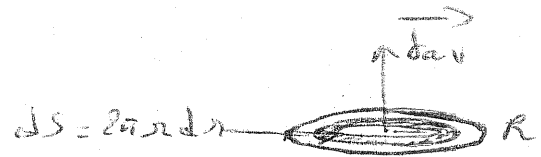
$$\vec{J}_{av} = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\partial}{\partial r} (K r^3) - 0 \right) \vec{e}_z$$

$$\vec{J}_{av} = 3 K r \vec{e}_z$$

$$I_a = \int_{(C)} \vec{J}_{as} d\ell + \iint_{(S)} \vec{J}_{av} dS$$

$$= -K R^2 \cdot 2\pi R + \int_0^R 3K r 2\pi r dr$$

$$I_a = -2K\pi R^3 + 6K\pi \frac{R^3}{3} = 0$$



c) $\vec{B}_d(P) = ?$

* $r < R$

$$\oint_C \vec{B}_d(\ell) \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \sum I_{a_{int}}$$

$$\sum I_{a_{int}} = \int_0^r \underbrace{J_{av}}_{3Kr} 2\pi r dr = 2K\pi r^3$$

$$B_d \cdot 2\pi r = 2K\pi r^3 \mu_0$$

$$\Rightarrow \vec{B}_d(P) = \mu_0 K r^2 \vec{e}_0$$

$$\Rightarrow \vec{B}_d(P) = \mu_0 \vec{M}$$

* $r > R$

$$B_d \cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I_{a_{int}} = 0 \Rightarrow \vec{B}_d = 0$$

d)

$$\vec{n} \wedge (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)_{(S)} = \int_{(S)} \vec{J}_{av} dS$$

$$\vec{n} \wedge (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)_{(S)} = \mu_0 \left(\vec{J}_S + \vec{J}_{as_1} + \vec{J}_{as_2} \right)$$

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_d$$

$$\vec{B}_1 = \vec{B}_d (r < R) = \mu_0 \vec{M}$$

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_d (r > R) = \vec{0}$$

$$\vec{J}_S = \vec{0}$$

$$\vec{J}_{as} = \vec{J}_{as}$$

$$\vec{J}_{as_2} = \vec{0}$$

Electricité 3
Série N°1
Les milieux diélectriques

Exercice 1/ On considère un dipôle électrostatique AB (en A une charge $-q$, en B une charge $+q$) ; et on pose $\vec{p} = q \vec{\ell}$ (moment dipolaire).

- 1) Calculer le potentiel créé par ce dipôle en un point M repéré par ses coordonnées polaires r et θ , on supposera $r \gg \ell$.
- 2) Calculer les composantes E_r et E_θ du champ électrique créé par ce dipôle.
- 3) Montrer que l'expression vectorielle du champ \vec{E} peut se mettre sous la forme : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{p}]$
- 4) Rappeler la formule de l'énergie d'un dipôle placé dans un champ électrique \vec{E}_0 .
- 5) Calculer la force exercée par une charge Q créant un champ \vec{E}_0 sur le dipôle \vec{p} .

Exercice 2/ Soit un volume diélectrique (l.h.i) de permittivité relative ϵ_r de forme sphérique, de rayon R , placé dans un champ extérieur uniforme \vec{E}_0 . On admettra que la polarisation \vec{P} est uniforme à l'intérieur de ce volume.

- 1) Calculer les densités de charge superficielle σ_p et volumique ρ_p en un point M de la sphère.
- 2) Montrer que le champ dépolarisant \vec{E}_p créé par les charges de polarisation au centre de la sphère est égal à : $\vec{E}_p = \frac{1-\epsilon_r}{2+\epsilon_r} \vec{E}_0$.
- 3) Etudier les cas $\epsilon_r = 1$ et $\epsilon_r = \infty$ et interpréter ces résultats.
- 4) Calculer le champ total \vec{E} à l'intérieur du diélectrique en fonction de ϵ_r et \vec{E}_0 .
- 5) Déterminer les vecteurs polarisation \vec{P} et excitation \vec{D} en tout point de la sphère en fonction de ϵ_r et \vec{E}_0 .
- 6) En admettant que le champ extérieur créé par les charges de polarisation est équivalent à celui d'un dipôle de moment $\vec{p} = \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{P}$.
 - a) Donner les composantes du vecteur \vec{E}_p en un point $M(r, \theta)$ avec $r \gg R$.
 - b) En déduire alors le champ extérieur total \vec{E} en M .

- c) Déterminer les vecteurs \vec{P} et \vec{D} à l'extérieur du diélectrique.
 d) Les lois de continuité des champs \vec{E} et \vec{D} sont-elles respectées ?. Justifier votre réponse.

Exercice 3/ Dans l'espace où règne un champ électrique uniforme \vec{E}_0 tel que : $\vec{E}_0 = E_0 \cos \alpha \vec{e}_x + E_0 \sin \alpha \vec{e}_y$, on introduit une lame diélectrique (l.h.i) d'épaisseur $2a$, de permittivité relative ϵ_r et de susceptibilité χ . Les faces de la lame considérées comme des plans infinis (l'un placé en $x = -a$ et l'autre en $x = a$) sont parallèles au plan YOZ (voir figure 1).

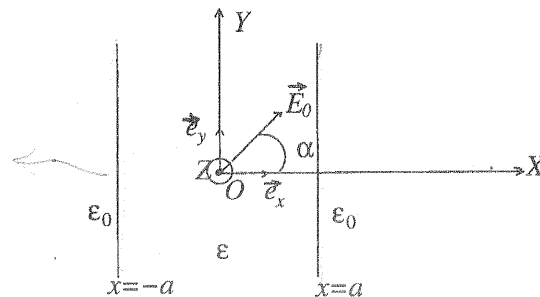


FIG. 1 -

- On supposera que les champs sont uniformes à l'intérieur.
- 1) Calculer le champ électrique total \vec{E} et le vecteur excitation électrique \vec{D} à l'intérieur du diélectrique en fonction de ϵ_0 , χ , α et \vec{E}_0 . (Utiliser les lois de continuité des champs \vec{E} et \vec{D}).
- 2) En déduire le champ dépolarisant \vec{E}_p créé à l'intérieur de la lame par les charges de polarisation.
- 3) Déterminer le vecteur polarisation \vec{P} en fonction de ϵ_0 , χ , α et \vec{E}_0 .
- 4) Déterminer les densités superficielles de charges fictives σ_{p1} en $x = -a$ et σ_{p2} en $x = a$ et la densité volumique de charges fictives ρ_p .
- 5) Sachant que le champ électrique créé par un plan infini chargé en un point de l'espace est normal au plan et a pour module $\frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}$, retrouver à partir de ce résultat l'expression du champ dépolarisant \vec{E}_p à l'intérieur de la lame diélectrique.

Exercice 4/ On considère un condensateur sphérique dont l'armature interne de rayon R_1 porte une charge positive Q et l'armature externe de rayon R_2 une charge $-Q$ (ces charges sont uniformément réparties sur la surface

des armatures). Un plan diamétral (P) sépare les deux milieux diélectriques (l.h.i) de permittivités ϵ_1 et ϵ_2 (voir figure 2).

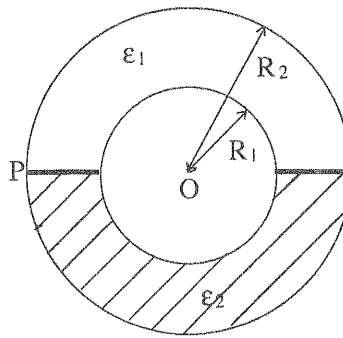


FIG. 2 -

- 1) En amettant que les surfaces équipotentielles ($V(M) = Cte$) sont des sphères de centre O (O étant le centre du condensateur) et de rayon r ($R_1 < r < R_2$); en déduire que le champ correspondant $\vec{E}(M)$ est radial.
- 2) Utiliser la continuité de la composante tangentielle de \vec{E} à la traversée du plan (P) pour montrer que $E(r)$ est le même en tout point M_1 ou M_2 des deux hémisphères. (M_1 et M_2 situés à égales distances r du centre du condensateur).
- 3) En appliquant le théorème de Gauss généralisé, montrer que :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q}{2\pi r^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \vec{e}_r$$
(\vec{e}_r étant un vecteur unitaire porté par $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$).
- 4) En déduire en fonction de Q , ϵ_1 et ϵ_2 :
 - a) Les vecteurs polarisation électrique $\vec{P}_1(M)$ et $\vec{P}_2(M)$.
 - b) Les densités surfaciques de polarisation.
 - c) Les densités volumiques de polarisation.

Rappel : $\text{div} \vec{A}(M) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A(r))$ (divergence en coordonnées sphériques pour un champ radial).

Le dipôle électrique

1°) On appelle « dipôle électrique » un ensemble de 2 charges ponctuelles $-q$ et $+q$ placées en A et B, distantes de l .

On évalue le potentiel électrostatique en un point M repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) . On suppose que $r \gg l$.

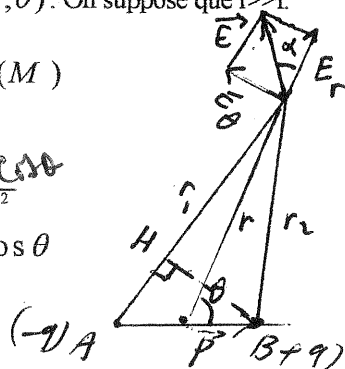
$$V(M) = V_q(M) + V_{-q}(M)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \right) \approx \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{csc}$$

$$\text{car } r_1 - r_2 = AH = l \cos \theta$$

$$\text{et } r_1 r_2 \approx r^2$$



On appelle « moment dipolaire » $\vec{p} = q\vec{AB}$; On peut

écrire $\vec{OM} = \vec{r} = r\vec{u}$

$$\rightarrow V(M) = \frac{ql}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

2°) Le champ dérive d'un potentiel pour chaque charge. Comme le potentiel V est la somme des deux potentiels, le champ total dérive du potentiel total :

$$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B = -\vec{\text{grad}}V_A + (-\vec{\text{grad}}V_B)$$

$$= -\vec{\text{grad}}(V_A + V_B) = -\vec{\text{grad}}(V)$$

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$$

Les composantes en coordonnées polaires du champ sont :

$$E_r = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad ; \quad E_\theta = \frac{2p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

son module est :

$$E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \sqrt{4 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta}$$

On note la décroissance en $1/r^3$ et que \vec{E} fait avec

$$\vec{OM} \text{ un angle } \alpha \text{ tel que } \tan \alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2} \tan \theta$$

3°)

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}V = -\vec{\text{grad}}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}\right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\text{grad}}\left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \vec{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{r}) + \vec{p} r \vec{\text{grad}}\left(\frac{1}{r^3}\right)$$

$$\text{comme } \vec{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{r}) = \vec{p} \text{ et } \vec{\text{grad}}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3}{r^4} \vec{r}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^3} \vec{\text{grad}}(\vec{p} \cdot \vec{r}) + \vec{p} r \left(-\frac{3}{r^4}\right) \vec{r} \right]$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^3} \vec{p} + 3\vec{p} r \left(\frac{\vec{r}}{r^4}\right) \right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^5} \left[3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r} - r^2 \vec{p} \right]$$

Définition : On appelle énergie électrostatique W d'une charge ponctuelle q passive, placée en un point P où le potentiel est V , le travail que peut fournir cette charge dans un déplacement l'amenant de P à l'infini. Il s'agit du travail fourni par la force électrostatique s'exerçant sur q . Ce travail est appelé énergie car dans certaines conditions il peut être recueilli par le milieu extérieur.

$$W = q(V - 0) = qV$$

L'autre façon équivalente : on appelle énergie électrostatique W d'une charge ponctuelle q en un point P où le potentiel est V , le travail dépensé par un opérateur pour amener la charge de l'infini jusqu'en P ; ceci d'une façon réversible, c'est à dire, par une succession d'états d'équilibre.

L'opérateur équilibre à tout moment la force électrostatique \vec{F} par une force \vec{F}'

$$\vec{F}' = -\vec{F}$$

Le travail de l'opérateur

$$\tau(\vec{F}') = -\tau(\vec{F}) = -q(0 - V) \Rightarrow W = qV$$

L'énergie potentielle (ou électrostatique) E_p du dipôle

placé dans un champ \vec{E}_o est l'énergie d'un ensemble de 2 charges passives placées dans un champ en un point A (charge $-q$) où le potentiel est V_A et en un point B (charge $+q$) où le potentiel est V_B .

$$E_p = W = W_A + W_B = qV_B - qV_A = q(V_B - V_A)$$

$$V_B - V_A = \vec{E}_o \cdot \vec{AB} = \vec{E}_o \cdot \vec{l}$$

$$\text{on a : } \rightarrow E_p = W = -q\vec{E}_o \cdot \vec{l} = -q\vec{l} \cdot \vec{E}_o = -\vec{p} \cdot \vec{E}_o$$

$$E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_o = -p \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_r$$

La charge Q placée à la distance r du centre du dipôle crée un champ électrostatique $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$

$$\Rightarrow E_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}_o = -p \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_x \cdot \vec{e}_r = -Q \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta$$

4°) En électrostatique le champ dérive d'un potentiel par conséquent la force dérive de l'énergie potentielle :

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} E_p = \frac{Q \cdot p}{4\pi\epsilon_0} \vec{\text{grad}} \frac{\cos \theta}{r^2}$$

$$= \frac{Q \cdot p}{4\pi\epsilon_0} \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r + \frac{1}{r^3} \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} \vec{e}_\theta \right]$$

$$= \frac{Q \cdot p}{4\pi\epsilon_0} \left[-2 \frac{1}{r^3} \cos \theta \vec{e}_r - \frac{1}{r^3} \sin \theta \vec{e}_\theta \right]$$

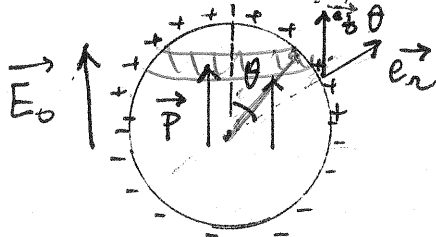
$$= -Q (E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta) = -Q \vec{E}$$

La sphère polarisée par un champ uniforme

1°) Nous supposons que le champ \vec{E}_o est dirigé selon OZ. Le champ agit sur les particules du milieu diélectriques (molécules ou atomes). Il provoque une distorsion du nuage électronique. La particule est ainsi polarisée ; elle possède un moment dipolaire \vec{p}_i orienté selon \vec{E}_o . Le volume élémentaire qui contient un certain nombre de particules possède un moment $d\vec{P}$. Ainsi, pour tout point du diélectrique, nous avons un moment dipolaire $\vec{P} = P\vec{e}_z$.

Par compensation la charge volumique est nulle et la charge est surfacique. La charge de l'hémisphère supérieure est positive et inférieure est négative.

$$\rho_p = -\text{div}\vec{P} = 0 \text{ et } \sigma = \vec{P} \cdot \vec{n} = P\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r = P \cos \theta$$



2°) On choisit la quantité élémentaire de charges $dQ = \sigma dS = \sigma R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ qui crée $d\vec{E}_p$. Nous faisons remarquer que sont équivalents les dS de la couronne élémentaire d'angle d'ouverture $d\theta$. Par intégration sur φ , on aboutait au champ créé par la couronne élémentaire :

$$d\vec{E}_{p(c)} = -\frac{P}{2\epsilon_o} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \vec{e}_z$$

d'où le champ dépolarisant au centre de la sphère

$$\vec{E}_p = \int d\vec{E}_{p(c)} = -\frac{P}{2\epsilon_o} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_p = -\frac{P}{3\epsilon_o} \vec{e}_z = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_o}$$

Cette expression est valable quelle que soit la direction de \vec{P} ou \vec{E}_o qui lui donne naissance.

Dans le diélectrique

$$\vec{D} = \epsilon_o \vec{E} + \vec{P} = \epsilon \vec{E} \Rightarrow \vec{P} = (\epsilon - \epsilon_o) \vec{E}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_p + \vec{E}_o \Rightarrow \vec{E}_p = \vec{E} - \vec{E}_o = \frac{\vec{P}}{\epsilon - \epsilon_o} - \vec{E}_o = \frac{-3\epsilon_o}{\epsilon - \epsilon_o} \vec{E}_p - \vec{E}_o$$

d'où

$$\vec{E}_p = \frac{1 - \epsilon_r}{2 + \epsilon_r} \vec{E}_o$$

3°) $\epsilon_r = 1 \Rightarrow \vec{E}_p$ (cas du vide, le champ dépolarisant est nul)

$\epsilon_r = \infty \Rightarrow \vec{E}_p = -\vec{E}_o \Rightarrow \vec{E} = \vec{0}$ (dans un conducteur)

$$4^\circ) \vec{E} = \vec{E}_o + \vec{E}_p = (1 + \frac{1 - \epsilon_r}{2 + \epsilon_r}) \vec{E}_o = \frac{3}{2 + \epsilon_r} \vec{E}_o$$

5°)

$$\vec{P} = -3\epsilon_o \vec{E}_p = \frac{3\epsilon_o(\epsilon_r - 1)}{2 + \epsilon_r} \vec{E}_o$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \frac{3\epsilon_o \epsilon_r}{2 + \epsilon_r} \vec{E}_o$$

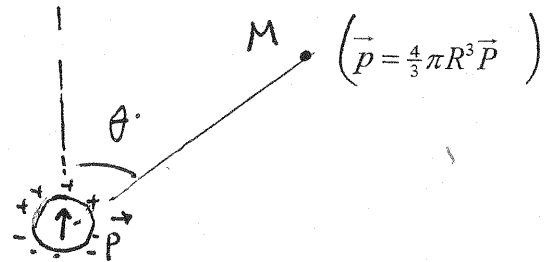
6°) La sphère se comporte comme un dipôle électrique pour les grandes distances ($r \gg R$).

a) En M, le champ dépolarisant

$$\vec{E}_p' = E_r \vec{e}_r + E_\theta \vec{e}_\theta = \frac{2P \cos \theta}{4\pi\epsilon_o r^3} \vec{e}_r + \frac{P \sin \theta}{4\pi\epsilon_o r^3} \vec{e}_\theta$$

$$\vec{E}_p' = \frac{2(\frac{4}{3})\pi R^3 P \cos \theta}{4\pi\epsilon_o r^3} \vec{e}_r + \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 P \sin \theta}{4\pi\epsilon_o r^3} \vec{e}_\theta$$

$$= \frac{2P \cos \theta}{3\epsilon_o} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \vec{e}_r + \frac{P \sin \theta}{3\epsilon_o} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \vec{e}_\theta$$



a) le champ total

$$\vec{E}' = \vec{E}_o + \vec{E}_p'$$

$$\vec{E}_p' = \left[E_o + \frac{2P}{3\epsilon_o} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \right] \cos \theta \vec{e}_r + \left[\frac{P}{3\epsilon_o} \left(\frac{R}{r}\right)^3 - E_o \right] \sin \theta \vec{e}_\theta$$

c) M est un point dans le vide :

$$\vec{D}' = \epsilon_o \vec{E}' \text{ et } \vec{P} = \vec{D}' - \epsilon_o \vec{E}' = \vec{0}$$

b) lois de continuité des champs \vec{E} et \vec{D} sur la surface de séparation ($r=R$), on a :

c) A l'intérieur du diélectrique :

$$\vec{E} = \frac{3}{2 + \epsilon_r} \vec{E}_o = \frac{3\epsilon_o}{2 + \epsilon_r} (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

A l'extérieur du diélectrique

$$\vec{E}' = \left[E_o + \frac{2P}{3\epsilon_o} \right] \cos \theta \vec{e}_r + \left[\frac{P}{3\epsilon_o} - E_o \right] \sin \theta \vec{e}_\theta \text{ et}$$

$$P = (\epsilon - \epsilon_o) E = \frac{3\epsilon_o(\epsilon_r - 1)}{2 + \epsilon_r} E_o$$

d'où

$$\vec{E}' = \frac{3\epsilon_r}{2 + \epsilon_r} E_o \cos \theta \vec{e}_r - \frac{3}{2 + \epsilon_r} E_o \sin \theta \vec{e}_\theta$$

Ainsi la composante tangentielle de \vec{E} est continue à la surface de la sphère (diélectrique).

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \text{ et } \vec{D}' = \epsilon \vec{E}' \Rightarrow$$

$$\vec{D} = \frac{3\epsilon_r \epsilon_o}{2 + \epsilon_r} E_o (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)$$

$$\vec{D}' = \frac{3\epsilon_r \epsilon_o}{2 + \epsilon_r} E_o \cos \theta \vec{e}_r - \frac{3\epsilon_o}{2 + \epsilon_r} E_o \sin \theta \vec{e}_\theta$$

Continuité de la composante normale de \vec{D}

Exo 3

Lame diélectrique polarisée

1°)

$$\vec{E}_0 = E_0 \cos \alpha \vec{i} + E_0 \sin \alpha \vec{j} = -E_0 \cos \alpha \vec{n} + E_0 \sin \alpha \vec{t}$$

$$\text{car } \vec{n} = -\vec{i} ; \quad \vec{t} = \vec{j}$$

- continuité de la composante tangentielle de \vec{E}

$$\vec{E} \cdot \vec{t} = \vec{E}_0 \cdot \vec{t} \rightarrow E_t = E_0 \sin \alpha$$

- continuité de la composante normale de \vec{D}

$$\vec{D} \cdot \vec{n} = \vec{D}_0 \cdot \vec{n} \rightarrow D_n = \epsilon E_n = -\epsilon E_0 \cos \alpha$$

$$\Rightarrow E_n = -\frac{E_0}{\epsilon_r} \cos \alpha = -\frac{E_0}{1+\chi} \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{E_0}{1+\chi} \cos \alpha \vec{n} + E_0 \sin \alpha \vec{t} = \frac{E_0}{1+\chi} \cos \alpha \vec{i} + E_0 \sin \alpha \vec{j}$$

$$\vec{D} = \epsilon_0 (1+\chi) \vec{E} = \epsilon_0 (E_0 \cos \alpha \vec{i} + (1+\chi) E_0 \sin \alpha \vec{j})$$

2°)

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_p \rightarrow \vec{E}_p = \vec{E} - \vec{E}_0 = \left(\frac{1}{1+\chi} - 1\right) E_0 \cos \alpha \vec{i}$$

$$\vec{E}_p = -\frac{\chi}{1+\chi} E_0 \cos \alpha \vec{i}$$

3°)

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} = \epsilon_0 \chi E_0 \left(\frac{\cos \alpha}{1+\chi} \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}\right)$$

4°) Les densités superficielles de charges fictives

en $x=-a$

$$\sigma_{p1} = \vec{P} \cdot \vec{n}_1 = \vec{P} \cdot (-\vec{n}) = -\frac{\epsilon_0 \chi}{1+\chi} E_0 \cos \alpha < 0$$

en $x=+a$

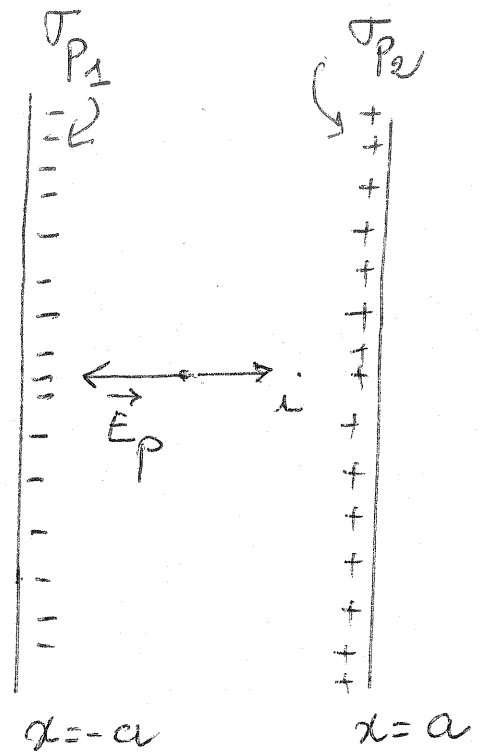
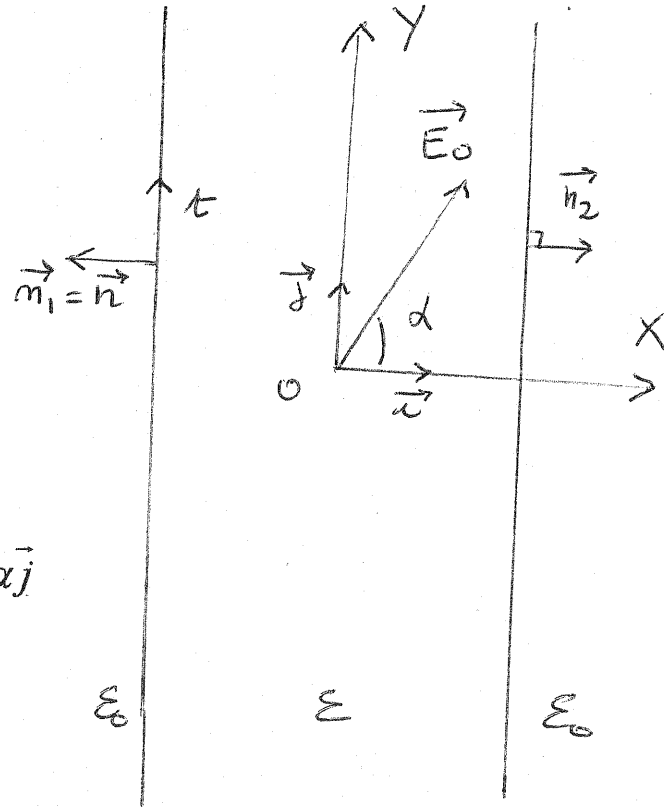
$$\sigma_{p2} = \vec{P} \cdot \vec{n}_2 = \vec{P} \cdot \vec{i} = \frac{\epsilon_0 \chi}{1+\chi} E_0 \cos \alpha > 0$$

La densité volumique de charges fictives est nulle car \vec{P} est uniforme.

$$\rho_p = -\text{div } \vec{P} = 0$$

5°) La distribution équivalente à deux plans chargés (rappel : $\vec{E} = \sigma / 2\epsilon_0 \vec{n}$)

$$\vec{E}_p = \frac{|\sigma_{p1}|}{2\epsilon_0} (-\vec{i}) + \frac{|\sigma_{p2}|}{2\epsilon_0} (-\vec{i}) = -\frac{\chi}{1+\chi} E_0 \cos \alpha \vec{i}$$



Le dipôle électrique

Ex 4

1°)

Première méthode :

V ne dépend que de r, puisque les surfaces équipotentielles sont des sphères de centre O.

On a :

$$\vec{E} = -\text{grad}V = -\frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_r$$

On voit que le champ est radial.

Deuxième méthode :

On sait que les lignes de champ sont perpendiculaires équipotentielles. Puisque ces dernières sont des sphères de centre O, donc le champ est radial.

2°) Puisque \vec{E} est radial, donc il est tangent au plan (P) :

$$\vec{E} = E(r)\vec{e}_r = E(r)\vec{\tau} \quad \text{sur } (P)$$

La continuité de la composante tangentielle de \vec{E} sur (P) conduit à :

$$E_1(r)\vec{\tau} = E_2(r)\vec{\tau} = E(r)\vec{\tau}$$

Par conséquent \vec{E} est le même sur la sphère de rayon r.

3°) Théorème de Gauss généralisée

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

soit :

$$\iint_{S_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{S}_2 = Q$$

$$\Rightarrow 2\pi r^2 D_1 + 2\pi r^2 D_2 = Q$$

d'autre part

$$D_1(r) = \epsilon_1 E_1(r) = \epsilon_1 E(r)$$

$$\text{et } D_2(r) = \epsilon_2 E_2(r) = \epsilon_2 E(r)$$

d'où

$$2\pi r^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2) E(r) = Q$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) r^2} \vec{e}_r$$

$$4^\circ) a) \vec{D}_i = \epsilon_o \vec{E}_i + \vec{P}_i = \epsilon_i \vec{E}_i$$

$$\Rightarrow \vec{P}_i = (\epsilon_i - \epsilon_o) \vec{E}_i = (\epsilon_i - \epsilon_o) \vec{E}(r)$$

d'où

$$\vec{P}_1(M) = (\epsilon_1 - \epsilon_o) \vec{E}(M) = \frac{Q(\epsilon_1 - \epsilon_o)}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_o)} \frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

$$\vec{P}_2(M) = (\epsilon_2 - \epsilon_o) \vec{E}(M) = \frac{Q(\epsilon_2 - \epsilon_o)}{2\pi(\epsilon_2 + \epsilon_o)} \frac{\vec{e}_r}{r^2}$$

b) Hémisphère de permittivité ϵ_1

Surface interne ($\vec{n}_1 = -\vec{e}_r$)

$$\sigma_{P_1}^1 = \vec{P}_1(R_1) \cdot \vec{n}_1 = \frac{-Q(\epsilon_1 - \epsilon_o)}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_o) R_1^2}$$

Surface externe : ($\vec{n}_2 = \vec{e}_r$)

$$\sigma_{P_2}^2 = \vec{P}_2(R_2) \cdot \vec{n}_2 = \frac{Q(\epsilon_1 - \epsilon_o)}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_o) R_2^2}$$

b) Hémisphère de permittivité ϵ_2

Surface interne ($\vec{n}_1 = -\vec{e}_r$)

$$\sigma_{P_2}^1 = \vec{P}_2(R_1) \cdot \vec{n}_1 = \frac{-Q(\epsilon_2 - \epsilon_o)}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) R_1^2}$$

Surface externe : ($\vec{n}_2 = \vec{e}_r$)

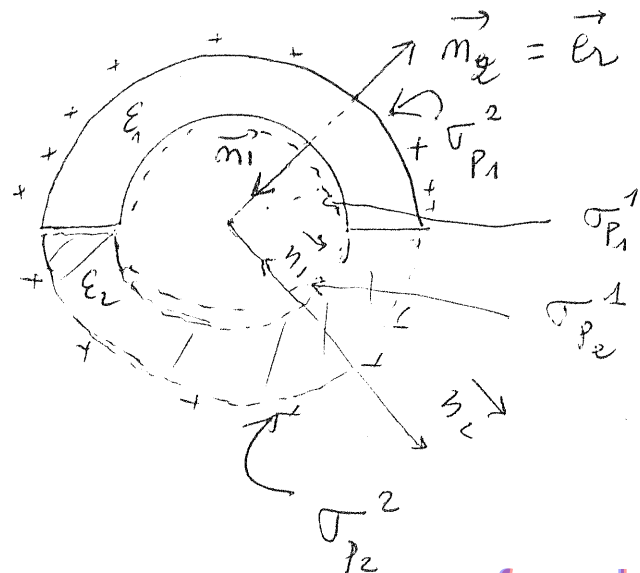
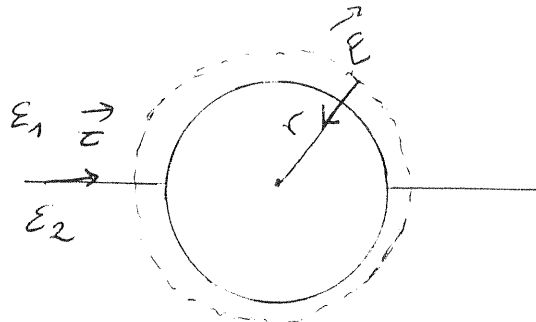
$$\sigma_{P_2}^2 = \vec{P}_2(R_2) \cdot \vec{n}_2 = \frac{Q(\epsilon_2 - \epsilon_o)}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2) R_2^2}$$

c) Densité volumique

$$\rho_{P_i} = -\text{div} \vec{P}_i = -(\epsilon_i - \epsilon_o) \text{div} \vec{E}(r)$$

$$= -(\epsilon_i - \epsilon_o) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E(r))$$

$$= -(\epsilon_i - \epsilon_o) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \right) = 0$$



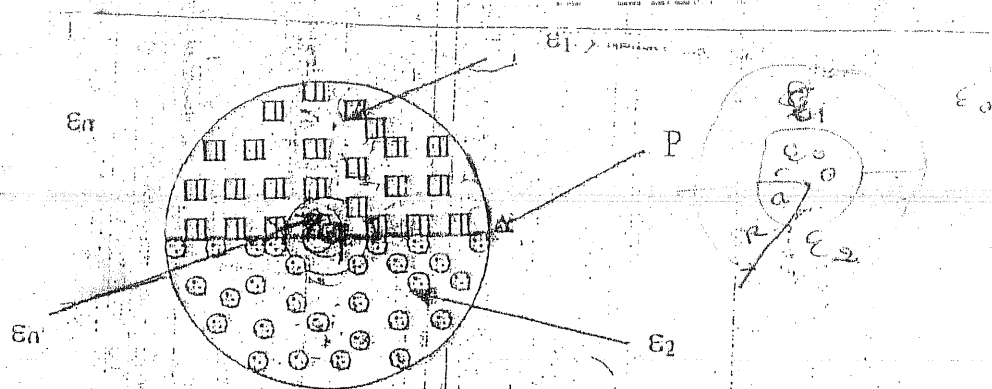
Contrôle N° 1

Module de physique 3 : Electricité

Exercice 1 :

On considère une sphère métallique (S) creuse d'épaisseur négligeable, de centre O et de rayon R . On place au centre de (S) une autre petite sphère métallique conductrice (s) de rayon a et de même centre O . Soit P un plan horizontal qui passe par le centre O et qui divise les deux sphères en deux parties égales. La sphère (s) contient du vide. La moitié supérieure de la sphère (S) est remplie d'un diélectrique linéaire homogène isotrope de permittivité absolue ϵ_1 et la moitié inférieure est remplie d'un autre diélectrique linéaire homogène isotrope de permittivité absolue ϵ_2 . L'espace extérieur à la sphère (S) est le vide. On place au centre O de la petite sphère (s) une charge ponctuelle q .

Les deux sphères sont isolées et initialement neutres.



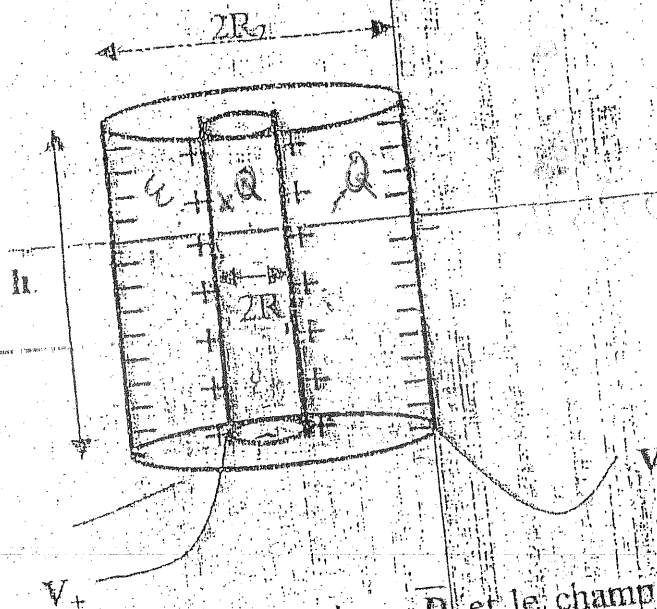
On admet que le champ électrique \vec{E} et le vecteur déplacement électrique \vec{D} ont la symétrie radiale.

- 1) pour $0 < r < a$, calculer les vecteurs déplacements électrique \vec{D}_0 et le champ électrique \vec{E}_0 .
- 2) pour $a < r < R$, calculer les vecteurs déplacements électrique \vec{D}_1 et le champ électrique \vec{E}_1 dans le diélectrique 1, \vec{D}_2 et \vec{E}_2 dans le diélectrique 2.
- 3) pour $R < r < \infty$, calculer les vecteurs déplacements électrique \vec{D}'_0 et le champ électrique \vec{E}'_0 dans le vide.
- 4) En déduire le potentiel V en tout point de l'espace.

ablier l'expression de la polarisation \vec{P}_1 dans le milieu ϵ_1 et \vec{P}_2 dans le milieu ϵ_2 .
 Calculer les densités de charges de polarisation là où elles existent.
 n utilisant les conditions de passage du vecteur déplacement électrique \vec{D} à la traversée de chaque surface, calculer les densités de charges réelles qui apparaissent sur les surfaces.

exercice 2 :

On considère un cylindre conducteur plein C_1 de rayon R_1 , de hauteur h chargé avec une charge positive $+Q$ sous le potentiel V_+ . On place ce cylindre C_1 au centre d'un autre cylindre creux de rayon $R_2 > R_1$, de même hauteur h et chargé avec une charge négative $-Q$ sous un potentiel V_- . L'espace entre les deux cylindres est remplie d'un diélectrique linéaire homogène isotrope de permittivité diélectrique ϵ . On suppose que $h \gg R_2$. L'ensemble des deux cylindres constitue donc un condensateur cylindrique.



- 1) Montrer que le vecteur déplacement électrique \vec{D} et le champ électrique \vec{E} sont radiaux.
 - 2) Déterminer \vec{D} et \vec{E} dans le diélectrique.
 - 3) En déduire le potentiel électrique V dans le diélectrique.
 - 4) Déterminer le vecteur polarisation électrique \vec{p} dans le diélectrique.
- Déterminer les charges de polarisation là où elles existent.

Correction du contrôle n° 1

EXERCICE 1

$$\overline{D} = D(r)\overline{u}_r \quad \overline{E} = E(r)\overline{u}_r \quad \text{div } \overline{D} = \rho_{rd}$$

$$\star \quad 0 < r < a$$

$$\iint_{S_1} \overline{D}_0 \cdot d\overline{S} = Q_{\text{int}}(S_1) = q = \iint_{S_1} D_0(r) \cdot \overline{u}_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi du_r \Rightarrow D_0(r) = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$D_0(r) = \frac{q}{4\pi r^2} \Rightarrow \overline{D}_0 = \frac{q}{4\pi r^2} \overline{u}_r \quad \text{et} \quad \overline{E}_0 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \overline{u}_r$$

$$\star \quad a < r < R$$

Sur le plan P, le champ électrique \overline{E} se réduit à sa seule composante tangentielle qui est toujours continue, donc le champ est continu.

$$\overline{E}_1(r) = \overline{E}_2(r) = \overline{E}(\hat{r})$$

$$\iint_{S_2} \overline{D} \cdot d\overline{S} = Q_{\text{int}}(S_2) = q =$$

$$\iint_{\frac{S_2}{1}} D_1(r) \cdot \overline{u}_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi du_r + \iint_{\frac{S_2}{2}} D_2(r) \cdot \overline{u}_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi du_r =$$

$$\iint_{\frac{S_2}{1}} \epsilon_1 E_1(r) \cdot \overline{u}_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi du_r + \iint_{\frac{S_2}{2}} \epsilon_2 E_2(r) \cdot \overline{u}_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi du_r =$$

$$\epsilon_1 E(r) 2\pi r^2 + \epsilon_2 E(r) 2\pi r^2 = q \Rightarrow E(r) = \frac{q}{2\pi r^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \Rightarrow \overline{E}(r) = \frac{q}{2\pi r^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \overline{u}_r$$

$$\overline{D}_1(r) = \frac{\epsilon_1 q}{2\pi r^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \overline{u}_r \quad \text{et}$$

$$\overline{D}_2(r) = \frac{\epsilon_2 q}{2\pi r^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \overline{u}_r$$

$$\star \quad R < r < \infty$$

$$\iint_{S_3} \overline{D}' \cdot d\overline{S} = Q_{\text{int}}(S_3) = q = \iint_{S_3} D'(r) \cdot \overline{u}_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi du_r \Rightarrow D'(r) = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$\text{et} \quad \overline{D}'(r) = \frac{q}{4\pi r^2} \overline{u}_r \quad \text{et} \quad \overline{E}'(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \overline{u}_r$$

$$4) \quad \overline{E} = -\text{grad} V \Rightarrow V(r) = -\int E(r) dr + K_1$$

$$R < r < \infty$$

$$\overline{E}'(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \overline{u}_r \Rightarrow V(r) = -\int \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr + K_1 \text{ pas de charge à l'infini}$$

$$R < r < \infty$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r}$$

$$\dagger \quad a < r < R$$

$$E(r) = \frac{q}{2\pi r^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \Rightarrow V(r) = \frac{q}{2\pi r (\epsilon_1 + \epsilon_2)} + K_1$$

Continuité de $V(r)$ au point $r=R$

$$\lim_{r \rightarrow R^-} V(r) = \lim_{r \rightarrow R^+} V(r) \Rightarrow \frac{q}{2\pi R (\epsilon_1 + \epsilon_2)} + K_2 = \frac{q}{4\pi R \epsilon_0} \Rightarrow K_2 = \frac{q}{4\pi R} \left[\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right]$$

Continuité de $V(r)$ au point $r=a$

$$\lim_{r \rightarrow a^-} V(r) = \lim_{r \rightarrow a^+} V(r) \Rightarrow \frac{q}{4\pi a (\epsilon_1 + \epsilon_2)} + K_2 = \frac{q}{4\pi a \epsilon_0} + K_1 \Rightarrow$$

$$K_1 = \frac{q}{4\pi R} \left[\frac{1}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{R}{a} \right) + \frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \left(\frac{R}{a} - 2 \right) \right]$$

5) Polarisation :

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} \Rightarrow$$

$$\vec{P}_1 = \epsilon_0 (\epsilon_{r1} - 1) \vec{E}_1 = \epsilon_0 (\epsilon_{r1} - 1) \frac{q}{2\pi r^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \vec{u}_r \Rightarrow \vec{P}_1 = \frac{(\epsilon_{r1} - 1)}{(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})} \frac{q}{2\pi r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{P}_2 = \epsilon_0 (\epsilon_{r2} - 1) \vec{E}_2 = \epsilon_0 (\epsilon_{r2} - 1) \frac{q}{2\pi r^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \vec{u}_r \Rightarrow \vec{P}_2 = \frac{(\epsilon_{r2} - 1)}{(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})} \frac{q}{2\pi r^2} \vec{u}_r$$

Charges de polarisation :

$$\rho_{pol} = -\text{div} \vec{P} \Rightarrow \rho_{pol1} = -\text{div} \vec{P}_1 = \rho_{pol2} = -\text{div} \vec{P}_2 = 0 \quad \text{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$

$$\sigma_{pol1}(r=a^-) = \vec{P}_1(r=a^-) \cdot \vec{n}(r=a^-) = \frac{(\epsilon_{r1} - 1)}{(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})} \frac{q}{2\pi a^2} \vec{u}_r \cdot (-\vec{u}_r)$$

$$\sigma_{pol1}(r=a^+) = -\frac{(\epsilon_{r1} - 1)}{(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})} \frac{q}{2\pi a^2}$$

$$\sigma_{pol2}(r=a^+) = \vec{P}_2(r=a^+) \cdot \vec{n}(r=a^+) = \frac{(\epsilon_{r2} - 1)}{(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})} \frac{q}{2\pi a^2} \vec{u}_r \cdot (\vec{u}_r)$$

$$\sigma_{pol2}(r=a^-) = -\frac{(\epsilon_{r2} - 1)}{(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})} \frac{q}{2\pi a^2}$$

$$\sigma_{pol}(r=R^-) = \overline{P_1}(r=R^-) \cdot \overline{n}(r=R^-) = \frac{(\epsilon_1 - 1)}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{2\pi R^2} \frac{1}{\epsilon_1} \cdot (+1)$$

$$\sigma_{pol}(r=R^-) = + \frac{(\epsilon_1 - 1)}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{2\pi R^2}$$

$$\sigma_{pol}(r=R^+) = \frac{(\epsilon_2 - 1)}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{2\pi R^2}$$

On vérifie que la somme totale des charges de polarisation est nulle :

$$Q_{pol} = Q_{Vpol} + Q_{Spol} \quad \text{avec} \quad Q_{Vpol} = 0$$

$$Q_{Spol} = - \frac{(\epsilon_1 - 1)}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{2\pi R^2} \cdot 2\pi R^2 - \frac{(\epsilon_1 - 1)}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{2\pi R^2} \cdot 2\pi R^2 + \\ + \frac{(\epsilon_2 - 1)}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{2\pi R^2} \cdot 2\pi R^2 + \frac{(\epsilon_2 - 1)}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \frac{q}{2\pi R^2} \cdot 2\pi R^2 = 0$$

7) Discontinuité de la composante normale de D :

$$D_1 - D_0 = \sigma_{rel}(r=a^+) \Rightarrow \frac{q\epsilon_1}{2\pi a^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} - \frac{q}{2\pi a^2} = \frac{q}{2\pi a^2} \left[\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} - \frac{1}{2} \right]$$

$$D_2 - D_0 = \sigma_{rel}(r=a^+) \Rightarrow \frac{q\epsilon_2}{2\pi a^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} - \frac{q}{2\pi a^2} = \frac{q}{2\pi a^2} \left[\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} - \frac{1}{2} \right]$$

$$D' - D_1 = \sigma_{rel}(r=R^-) \Rightarrow - \frac{q\epsilon_1}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} + \frac{q}{4\pi R^2} = \frac{q}{2\pi R^2} \left[- \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} + \frac{1}{2} \right]$$

$$D' - D_1 = \sigma_{rel}(r=R^+) \Rightarrow - \frac{q\epsilon_1}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} + \frac{q}{4\pi R^2} = \frac{q}{2\pi R^2} \left[- \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} + \frac{1}{2} \right]$$

$$D' - D_2 = \sigma_{rel}(r=R^-) \Rightarrow - \frac{q\epsilon_2}{2\pi R^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} + \frac{q}{4\pi R^2} = \frac{q}{2\pi R^2} \left[- \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} + \frac{1}{2} \right]$$

On vérifie que la somme totale des charges réelles est nulle :

$$\Sigma Q_{rel} = \frac{q}{2\pi a^2} \left[\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} - \frac{1}{2} \right] \cdot 2\pi a^2 + \frac{q}{2\pi a^2} \left[\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} - \frac{1}{2} \right] \cdot 2\pi a^2 + \\ + \frac{q}{2\pi R^2} \left[- \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} + \frac{1}{2} \right] \cdot 2\pi R^2 + \frac{q}{2\pi R^2} \left[- \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} + \frac{1}{2} \right] \cdot 2\pi R^2 = 0$$

EXERCICE 2 :

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r \text{ et } \vec{D} = D(r)\vec{u}_r$$

$$0 < r < R_1 \text{ conducteur } \vec{E} = \vec{0}$$

$$R_1 < r < R_2 \text{ diélectrique}$$

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = +Q = D(r)2\pi r h \Rightarrow \vec{D}(r) = \frac{+Q}{2\pi r h} \vec{u}_r \text{ et } \vec{E}(r) = \frac{+Q}{2\epsilon\pi r h} \vec{u}_r$$

$$\vec{E} = -\text{grad}V \Rightarrow V(r) = -\int E(r)dr + K \Rightarrow V(r) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon h} \text{Log}r + K$$

$$\lim_{r \rightarrow R_1} V(r) = V_+ \Rightarrow K = V_+ + \frac{Q}{2\pi\epsilon h} \text{Log}R_1$$

$$\lim_{r \rightarrow R_2} V(r) = V_- = V_+ + \frac{Q}{2\pi\epsilon h} \text{Log} \frac{R_1}{R_2}$$

$$V_+ - V_- = V = \frac{Q}{2\pi\epsilon h} \text{Log} \frac{R_2}{R_1}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1}{2\pi\epsilon h} \text{Log} \frac{R_2}{R_1}$$

Polarisation :

$$\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \frac{+Q}{2\epsilon\pi r h} \vec{u}_r$$

$$\rho_{pol} = -\text{div} \vec{P} = 0, \text{ il n'y a pas de charges réelles}$$

$$\sigma_{pol}(r = R_1^+) = \vec{P}(r = R_1^+) \cdot \vec{n}(r = R_1^+) = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \frac{+Q}{2\epsilon\pi R_1 h} \vec{u}_r \cdot (-\vec{u}_r)$$

$$\sigma_{pol}(r = R_1^+) = -\epsilon_0(\epsilon_r - 1) \frac{+Q}{2\epsilon\pi R_1 h}$$

$$\sigma_{pol}(r = R_2^-) = \vec{P}(r = R_2^-) \cdot \vec{n}(r = R_2^-) = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \frac{+Q}{2\epsilon\pi R_2 h} \vec{u}_r \cdot (+\vec{u}_r)$$

$$\sigma_{pol}(r = R_2^-) = +\epsilon_0(\epsilon_r - 1) \frac{+Q}{2\epsilon\pi R_2 h}$$

On vérifie que la somme totale des charges de polarisation est nulle :

$$Q_{pol} = Q_{Vpol} + Q_{Spol} \text{ avec } Q_{Vpol} = 0$$

$$Q_{pol} = Q_{Spol} = \frac{-Q}{2\epsilon\pi R_1 h} 2\pi R_1 h + \frac{+Q}{2\epsilon\pi R_2 h} 2\pi R_2 h = 0$$



1er Partiel - 1ère Session
EPREUVE D'ELECTROMAGNETISME

(durée : 2 H)

I/ Les armatures conductrices d'un condensateur plan chargé sont distantes de e .

A) Le condensateur est placé dans l'air ($\epsilon = \epsilon_0$). Rappeler brièvement les expressions du champ électrique \vec{E}_0 et de la d.d.p V_0 entre les armatures en fonction de la densité superficielle de charge σ sur les armatures

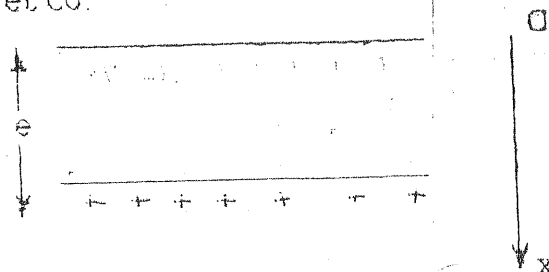
B) Les armatures étant isolées, on introduit entre elles une lame diélectrique (L, H, I) d'épaisseur e et de susceptibilité χ . On admettra que par raison de symétrie, la polarisation \vec{P} du diélectrique est colinéaire à \vec{E}_0 et s'écrit :

$$\vec{P} = k \vec{E}_0 \quad \text{avec } k \text{ une constante positive.}$$

1°) Déterminer les densités volumique ρ_p et surfacique σ_p des charges de polarisation. En déduire l'expression du champ dépolarisant \vec{E}_p . On exprimera σ_p et E_p en fonction de k et σ .

2°) Exprimer la relation qui lie \vec{P} et le nouveau champ \vec{E} entre les armatures. Calculer en fonction de χ les valeurs de k et E/E_0 .

3°) Exprimer les nouvelles valeurs de la d.d.p V entre les armatures et la capacité C du condensateur en fonction de χ et des valeurs initiales V_0 et C_0 .



مكتبة يونس
تونس
GSM: 088514521
البريد الإلكتروني: y@univ-bordj.dz

AYOUB
BAJABAJI

149
2000

T.S.V.P.

parcourue par un courant i . Exprimer l'induction B créée au point M de son axe à la distance $x = OM$. Exprimer B en fonction du demi-angle α au sommet du cône formé par M et la spire.

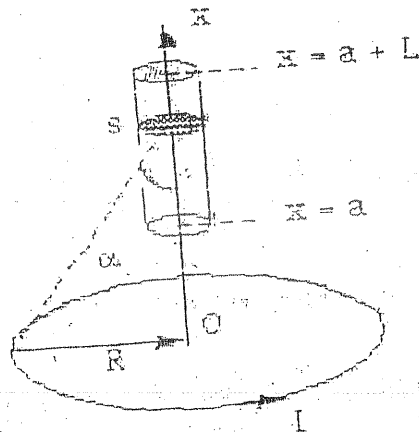
B) Un solénoïde de longueur L et de très petite section s est constitué par un enroulement de n spires circulaires jointives par un fil de longueur sur l'axe.

La spire (O,R) a le même axe que le solénoïde. On admettra que l'induction qu'elle crée est la même en tout point d'une section s du solénoïde.

1°) Calculer le flux magnétique $\Phi(x)$ à travers une section droite quelconque de centre M ($a \leq x \leq a + L$).

2°) Calculer le flux total d'induction $\Phi(a)$ à travers tout le solénoïde. En déduire le coefficient M de mutuelle induction des deux circuits.

3°) On éloigne le solénoïde à l'infini. Déterminer la quantité d'électricité q induite dans le solénoïde de résistance r au cours de ce déplacement.



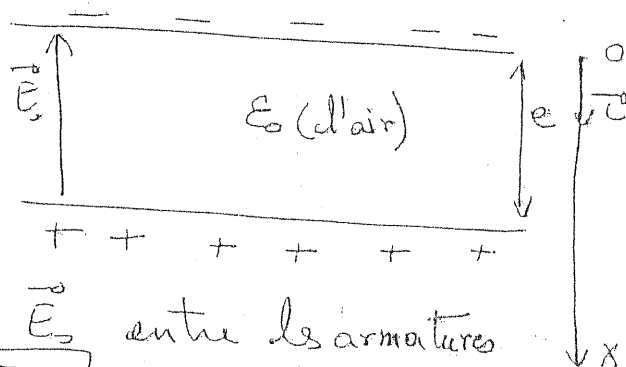
N.B. : Le vecteur surface \vec{s} associé à la section s est orienté dans le sens \vec{Ox} .

Solenoïde

Premier partiel 92-93^o électromagnétisme

I)

(A)



le champ \vec{E}_0 entre les armatures

$$\vec{E}_0 = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{x}$$

le potentiel V_0 entre les armatures

$$\vec{E}_0 = -\text{grad } V_0 \Rightarrow V_0 = -\int \vec{E}_0 \cdot d\vec{\ell}$$

$$= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \int_0^e dx$$

$$V_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} e$$

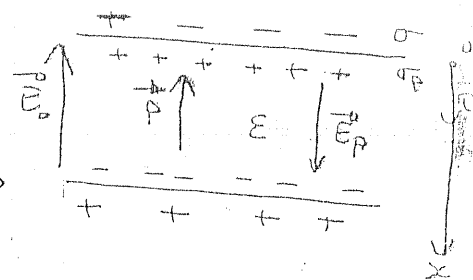
(B)

① la densité volumique ρ_p :

$$\rho_p = -\text{div } \vec{P}$$

$$= -\text{div} \left(-k \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{x} \right)$$

on a $\vec{P} = k \vec{E}_0$
 $\vec{P} = -k \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{x}$



donc

$$\rho_p = 0$$

car $\text{div}(\text{cte}) = 0$

la densité surfacique σ_p

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

$$= -k \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{x} \cdot (-\vec{x})$$

($\vec{n} = -\vec{x}$)

$$\sigma_p = \frac{k\sigma}{\epsilon_0}$$

l'expression du champ de polarisation:

$$\vec{E}_p = + \frac{k\sigma}{\epsilon_0} \vec{x}$$

$$\vec{E}_p = + \frac{k\sigma}{\epsilon_0} \vec{x}$$

$$\vec{E}_p = + \frac{\sigma_p}{\epsilon_0} \vec{x}$$

la relation entre \vec{P} et \vec{E} est :

$$\vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E}$$

Calcul de k et ϵ/ϵ_0 en fct de χ

$$\vec{P} = k \vec{E} = \chi \epsilon_0 (\vec{E}_0 + \vec{E}_p)$$

$$-k \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{x} = \chi \epsilon_0 \left(-\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{x} + \frac{k\sigma}{\epsilon_0^2} \vec{x} \right)$$

$$-\frac{k\sigma}{\epsilon_0} = \chi \epsilon_0 \left(\frac{k\sigma}{\epsilon_0^2} - \frac{\sigma}{\epsilon_0} \right)$$

$$\cancel{\chi \sigma} = \frac{\chi k \sigma}{\epsilon_0} + \frac{k \sigma}{\epsilon_0} = \frac{k(1+\chi)}{\epsilon_0}$$

$$k = \frac{\epsilon_0 \chi}{1+\chi}$$

③ la ddp entre les armatures V :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V \Rightarrow V = -\int \vec{E} d\ell$$

$$V = \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0} - \frac{k\sigma}{\epsilon_0^2} \right) x$$

$$V = \frac{e\sigma}{\epsilon_0} - \frac{e\sigma}{\epsilon_0^2} \frac{\epsilon_0 \chi}{1+\chi}$$

$$= \frac{e\sigma}{\epsilon_0} - \frac{e\sigma \chi}{\epsilon_0 (1+\chi)}$$

$$= \frac{e\sigma}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{\chi}{1+\chi} \right) \Rightarrow V = \frac{e\sigma}{\epsilon_0} \frac{1}{1+\chi}$$

$$V = \frac{V_0}{1+\chi}$$

capacité C du condensateur

$$V = \frac{V_0}{1+\chi}$$

$$V = \frac{q}{C}$$

$$V_0 = \frac{q}{C_0}$$

$$\frac{q}{C} = \frac{q}{C_0} \frac{1}{1+\chi} \Rightarrow$$

$$C = (1+\chi) C_0$$

on remarque que $C > C_0$

EXAMEN DE LA 2ème SESSION

EPREUVE D'ELECTROMAGNETISME

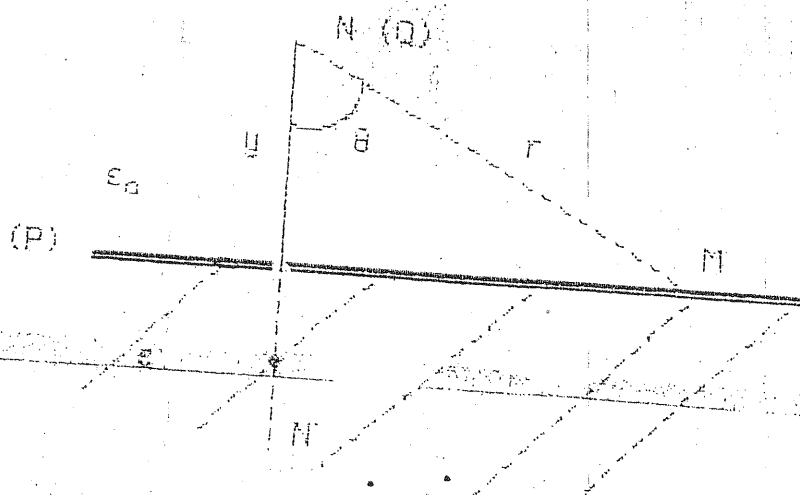
(Durée : 1 H)

Un plan (P) non chargé, sépare le vide d'un diélectrique (ih) de permittivité absolue $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ et un point N portant une charge $Q > 0$ dans le vide à la distance y du plan (P). (voir figure).

Vérifier que pour le champ E la solution est la suivante :

- En un point du diélectrique le champ électrique E_1 est celui produit par une charge KQ (K est une constante) placée en N' dans un diélectrique occupant tout l'espace.
- Dans le vide, le champ E_2 est celui créé par une charge Q en N et une charge $(1-K)Q$ en N' , symétrique de N par rapport à (P). Ces deux charges étant supposées placées dans le vide.

- Déterminer la constante K en fonction de ϵ_r .
- Calculer le vecteur polarisation P .
- Pouvait-on prévoir qualitativement le signe des charges fictives ?
- Calculer les densités de charges en tout point de l'espace.
- Calculer la charge totale fictive Q_p portée par le plan (P) en fonction de ϵ_r et Q .
- Que devient cette charge dans les deux cas limites $\epsilon_r = 1$ et $\epsilon_r = \infty$? A quoi correspondent pratiquement ces deux cas extrêmes ?
- Calculer la force F s'exerçant sur le plan (P) en précisant son sens.



73

EXAMEN DE LA 2^{ème} SESSION

EPREUVE D'ELECTROMAGNETISME

(Durée : 1 h)

Un plan (P) non chargé, sépare le vide d'un diélectrique (di) de permittivité absolue $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ et un point N portant une charge $Q > 0$ dans le vide à la distance y du plan (P). (voir figure).

Vérifier que pour le champ \vec{E} la solution est la suivante :

a) En un point du diélectrique le champ électrique \vec{E}_1 est celui produit par une charge KQ (K est une constante) placée en N' dans un diélectrique occupant tout l'espace.

b) Dans le vide, le champ \vec{E}_2 est celui créé par une charge Q en N et une charge $(1-K)Q$ en N' , symétrique de N par rapport à (P). Ces deux charges étant supposées placées dans le vide.

1°/ Déterminer la constante K en fonction de ϵ_r .

2°/ Calculer le vecteur polarisation \vec{P} .

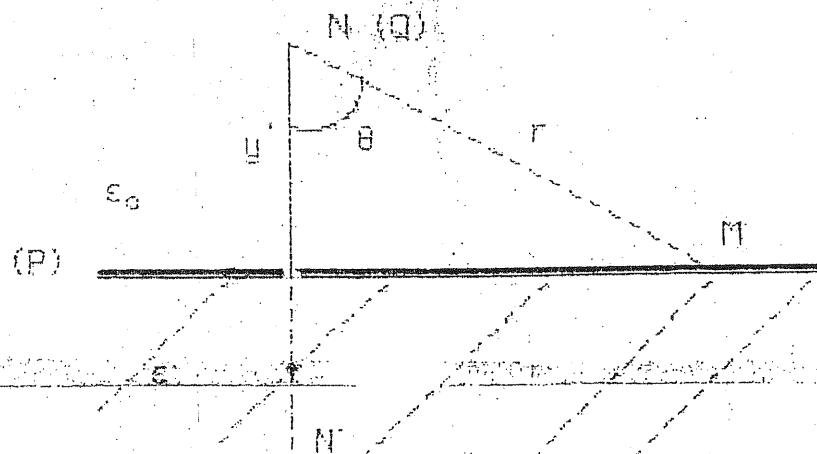
3°/ Pourrait-on prévoir qualitativement le signe des charges fictives ?

4°/ Calculer les densités de charges en tout point de l'espace.

5°/ Calculer la charge totale fictive Q_p portée par le plan (P) en fonction de ϵ_r et Q .

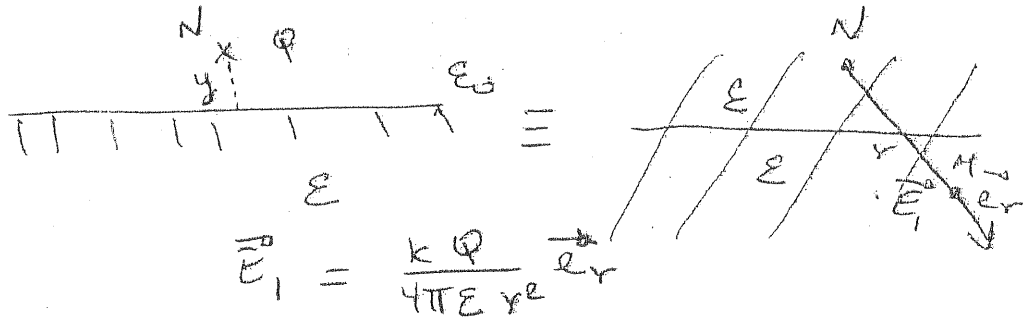
6°/ Que devient cette charge dans les deux cas limites $\epsilon_r = 1$ et $\epsilon_r = \infty$? A quoi correspondent pratiquement ces deux cas extrêmes ?

7°/ Calculer la force F s'exerçant sur le plan (P) en précisant son sens.

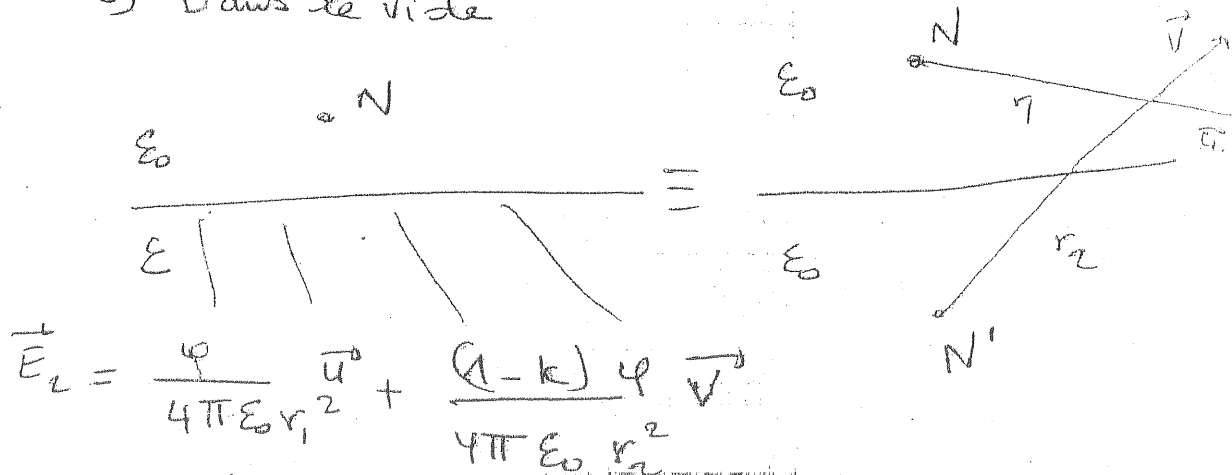


73

a) Dans le diélectrique

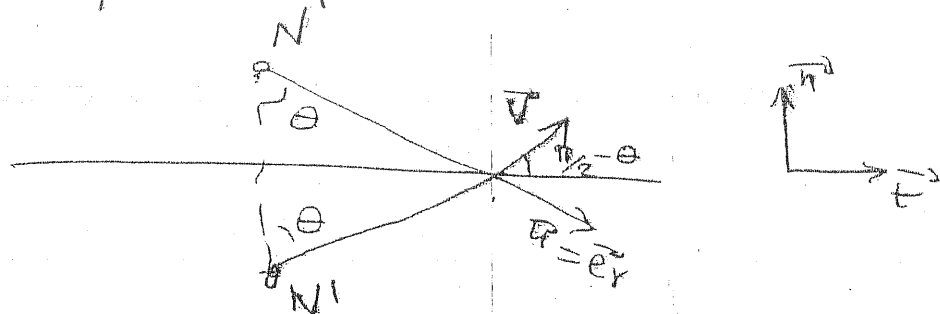


b) Dans le vide



1) Détermination de k

À la surface du plan $r_1 = r_2 = r$



on définit deux vecteurs unitaire

\vec{t} = tangente à (P)

\vec{n} = normale à (P)

$$\vec{u} = \vec{e}_r = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \vec{t} - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \vec{n}$$

$$\vec{v} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \vec{t} + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \vec{n}$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$$

$$\vec{u} = \vec{e}_r = -\cos\theta \vec{n} + \sin\theta \vec{t}$$

$$\vec{v} = \cos\theta \vec{n} + \sin\theta \vec{t}$$

①

7.4

$$\vec{E}_1 \vec{E} = \vec{E}_2 \vec{E}$$

$$\frac{k\varphi}{4\pi\epsilon r^2} \vec{e}_r \vec{E} = \frac{\varphi}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{E} + \frac{(1-k)\varphi}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin\theta$$

$$\frac{k\varphi}{4\pi\epsilon r^2} \sin\theta = \frac{\varphi}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin\theta + \frac{(1-k)\varphi}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sin\theta$$

$$\frac{k}{\epsilon} = \frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1-k}{\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow k = \epsilon r + (1-k)\epsilon r = \epsilon r (2-k)$$

$$\Rightarrow k + k\epsilon r = 2\epsilon r$$

$$\Rightarrow k = \frac{2\epsilon r}{1+\epsilon r}$$

$$3) \vec{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E}_1 = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \frac{k\varphi}{4\pi\epsilon r^2} \vec{e}_r$$

$$= \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right) \frac{2\epsilon r}{(\epsilon_r + 1)} \cdot \frac{\varphi}{4\pi r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{P} = \frac{2(\epsilon_r - 1)\varphi}{(\epsilon_r + 1)4\pi r^2} \vec{e}_r$$

3) Diélectrique polarisé = deux densités de charges fictives surfaciques et volumiques placées dans le vide

$$\sigma_p = \vec{n} \cdot \vec{P}$$

$$\rho_p = -\text{div } \vec{P}$$

4) À partir du signe de la charge Q et $\sum Q_p = 0$
(somme algébrique des charges de polarisation est nulle)

$$\textcircled{2} \quad Q_{ps} = -Q_{pv}$$

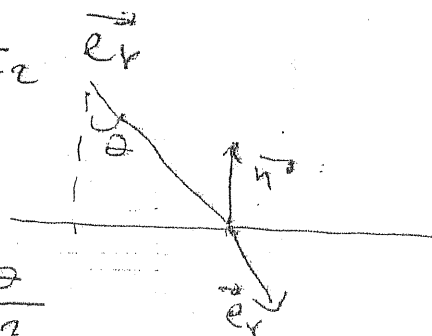
si $Q > 0 \Rightarrow \varphi_{PS} < 0 \Rightarrow \varphi_{PV} > 0$

5) charges de polarisation sur facie

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

$$\vec{P} = \frac{\epsilon(\epsilon_r - 1)}{(\epsilon_r + 1)} \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r$$

$$\vec{e}_r \cdot \vec{n} = -\cos \theta$$



$$\sigma_p = \frac{\epsilon(1 - \epsilon_r)}{(\epsilon_r + 1)} \frac{Q \cos \theta}{4\pi r^2}$$

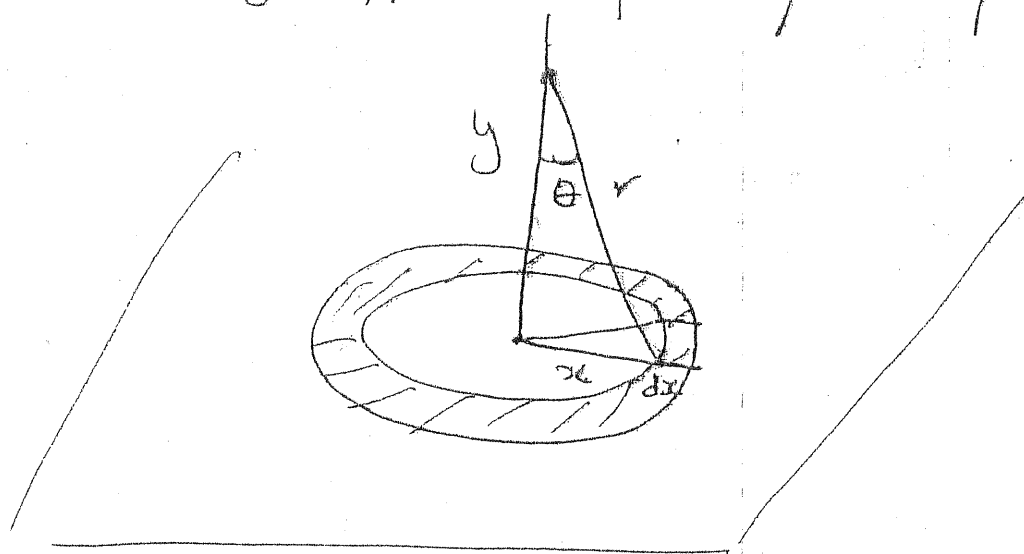
$$\sigma_p < 0 \text{ si } Q > 0$$

* charges de polari volumique.

$$\rho_p = -\text{div } \vec{P} \text{ or } \text{div} \left(\frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0 \Rightarrow \rho_p = 0$$

pas de charge de polari volumique

6) charge q_p totale portee par le plan (P)



La charge portee par une couronne de rayon r

$$dq_p = \sigma_p ds \Rightarrow \text{or } ds = 2\pi x dx$$

ona $\tan \theta = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y \tan \theta$ et $\cos \theta = \frac{y}{r}$
 $dx = \frac{y d\theta}{\cos^2 \theta}$

$x^2 + y^2 = r^2 \Rightarrow x = y \tan \theta$ et

$x dx = r dr$ | $\boxed{y=0}$
 $\varphi_P = \int \frac{2(1-\epsilon_r)\varphi}{4\pi(\epsilon_r+1)} \cdot 2\pi \frac{\cos \theta}{r^2} x dx$

$= \left(\frac{1-\epsilon_r}{1+\epsilon_r} \right) \varphi \int_0^{+\infty} \frac{\cos \theta}{r^2} x dx$

or $\cos \theta = \frac{y}{r}$
 $x dr = r dr$

$= \left(\frac{1-\epsilon_r}{1+\epsilon_r} \right) \varphi \int_0^{+\infty} \frac{\cos \theta}{r^2} x dx$

$= \left(\frac{1-\epsilon_r}{1+\epsilon_r} \right) \varphi \int_0^{+\infty} y \frac{dr}{r^2} = \left(\frac{1-\epsilon_r}{1+\epsilon_r} \right) \varphi$

$\boxed{\varphi_P = (1-k)\varphi} \Rightarrow \boxed{\varphi_P = \frac{1-\epsilon_r}{1+\epsilon_r} \varphi}$

7) $\epsilon_r \rightarrow 1$ $\varphi_P \rightarrow 0$ on tend vers le cas d'un plan chargé φ dans le vide.

$\epsilon_r \rightarrow \infty$ $\varphi_P = -\varphi$ on tend vers le cas d'un plan chargé en face plan conducteur

8) $\vec{P} = \frac{(1-k)\varphi^2}{16\pi\epsilon_0 y^2}$

force attractive exercée par la charge image \checkmark .

$$15 + 3 =$$

18 p

1

A

Epreuve d'Electromagnétisme

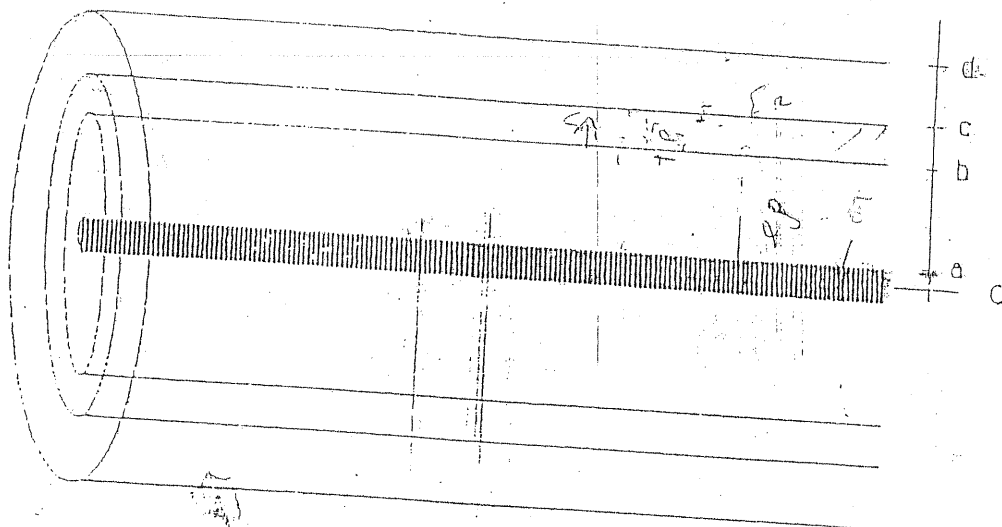
PROBLEME

Un cylindre indéfini, de rayon a , placé dans le vide, porte une densité superficielle de charges σ . On note Q la charge par unité de longueur. On désigne par p la distance à l'axe du cylindre.

1) a- Etablir la relation $Q = 2\pi a\sigma$.

b- Calculer pour $p > a$ le champ électrique E_0 et l'excitation électrique D_0 créés par ces charges.

2) On place autour de ce cylindre un cylindre creux de rayons b et c , constitué d'un milieu électrique L.H.I. de permittivité ϵ_1 . Puis on place (voir fig.) un autre cylindre creux, de rayons c et d , constitué d'un milieu électrique L.H.I. de permittivité ϵ_2 . Les cylindres sont infiniment longs.



10

12

Epreuve d'Electromagnetisme 93/94

Corrigé

Problème

a- Relation $Q = 2\pi a\sigma$?

ds = élément de surface sur le cylindre de rayon a . (surface latérale).

$$ds = a d\theta dz \quad (\text{coordonnées cylindriques}).$$

ds porte l'élément de charge $dq = \sigma ds = \sigma a d\theta dz$

la charge élémentaire par unité de longueur est donc :

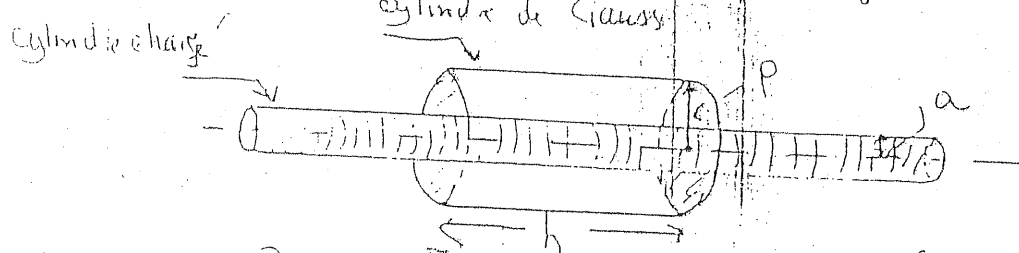
$$\frac{dQ}{dz} = \frac{dq}{dz} = \sigma a d\theta$$

d'où la charge par unité de longueur,

$$Q = \int dQ = \sigma a \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi a\sigma$$

b- \vec{E}_0 , \vec{D}_0 pour $p > a$?

→ Surface de Gauss : cylindre de rayon $p (> a)$ de même axe OZ que le cylindre chargé et de hauteur h .



remarque : Pour des raisons de symétrie :

$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_p \quad , \quad \vec{D}_0 = D_0 \vec{e}_p$$

(35)

D'après le théorème de Gauss :

$$\oiint \vec{E}_0 \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} h \quad (\text{On ne compte que la part de la charge contenue dans la surface de Gauss})$$

d'où $E_0 2\pi r h = \frac{Q}{\epsilon_0} h \Rightarrow \vec{E}_0 = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 r} \vec{e}_r$

ou encore $\boxed{\vec{E}_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_r}$

$\vec{D}_0 = \epsilon_0 \vec{E}_0 \Rightarrow \boxed{\vec{D}_0 = \frac{\sigma}{\rho} \vec{e}_r}$

2.

a) \vec{D} pour $r > a$:

Pour des raisons de symétrie $\vec{D} = D \vec{e}_r$

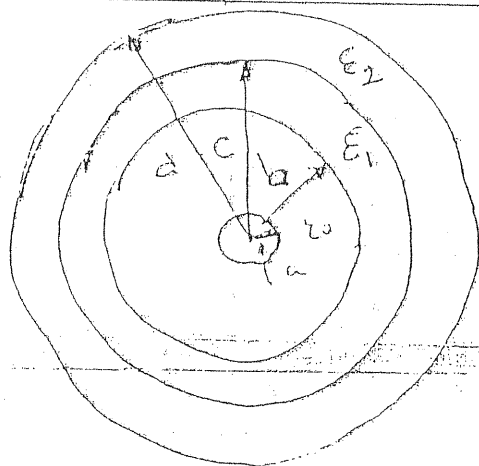
D'après le théorème de Gauss Généralisé :

$$\oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{libre int}}$$

surface de Gauss = cylindre (axe Oz, rayon r , hauteur

$\Rightarrow D 2\pi r h = Q h \Rightarrow \boxed{\vec{D} = \frac{Q}{2\pi r} \vec{e}_r \quad r > a}$

b) \vec{E} pour $r > a$:



En général :

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\epsilon(\text{milieu})}$$

d'où \rightarrow

(36)

15

$a < p < b$	$b < p < c$	$c < p < d$	$p > d$
$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_1 p} \vec{e}_p$	$\frac{Q}{2\pi\epsilon_1 p} \vec{e}_p$	$\frac{Q}{2\pi\epsilon_2 p} \vec{e}_p$	$\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 p} \vec{e}_p$

c) Polarisation dans chaque milieu diélectrique ?

Milieu 1, H, I donc :

$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E}$$

Donc :

→ milieu 1 : $\epsilon = \epsilon_1 \Rightarrow \vec{P}_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E} = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{2\pi\epsilon_1 p} Q \vec{e}_p$

→ milieu 2 : $\epsilon = \epsilon_2 \Rightarrow \vec{P}_2 = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \vec{E} = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{2\pi\epsilon_2 p} Q \vec{e}_p$

d) Les densités de charges liées ?

→ charges liées volumiques : Que ce soit dans le milieu (1) ou dans le milieu (2), il n'y a pas de charges libres en volume, donc la densité de charges liées en volume est nulle.

(rappel : $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_L + \rho_P}{\epsilon_0}$)

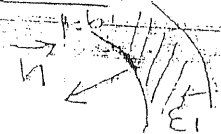
$$\text{div } \vec{D} = \rho_L \Rightarrow \rho_L \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{\epsilon_0} \right) = \frac{\rho_P}{\epsilon_0}$$

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad \text{et par conséquent} \quad \rho_L = 0 \Leftrightarrow \rho_P = 0$$

→ charges liées surfaciques

$$\sigma_P = \vec{P} \cdot \vec{n} \rightarrow \text{Attention : } \vec{n} \text{ vecteur normal à la surface et sortant}$$

• surface $p = b$

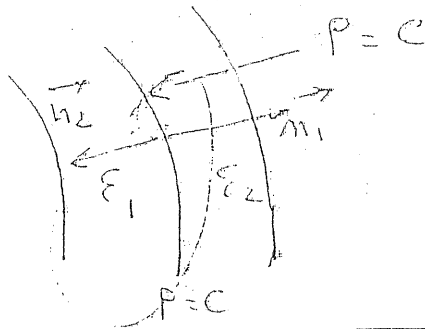


$$\sigma_P(p=b) = \vec{P}_1 \cdot (-\vec{e}_p)$$

$$\sigma_P(p=b) = - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{2\pi\epsilon_1 b} Q$$

surface $p=c$

(6)



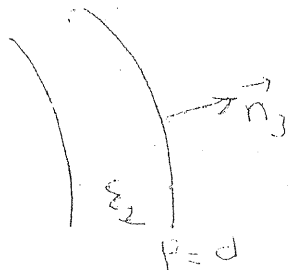
$$\sigma_p(p=c) = \vec{P}_1 \cdot \vec{n}_1 + \vec{P}_2 \cdot \vec{n}_2$$

$$\sigma_p(c) = \vec{P}_1 \cdot \vec{e}_p + \vec{P}_2 \cdot (-\vec{e}_p)$$

$$\sigma_p(p=c) = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{2\pi\epsilon_1 c} Q - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{2\pi\epsilon_2 c} Q$$

$$\Rightarrow \sigma_p(p=c) = \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{2\pi\epsilon_1 c} - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{2\pi\epsilon_2 c} \right) Q$$

surface $p=d$



$$\sigma_p(p=d) = \vec{P}_2 \cdot \vec{n}_3 = \vec{P}_2 \cdot \vec{e}_p$$

$$\sigma_p(p=d) = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{2\pi\epsilon_2 d} Q$$

e) \vec{E}_{p1} ?

D'après la question No.1, le champ créé par un cylindre ^{infini} de rayon R et portant la densité de charge surfacique σ est donné par :

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{R\sigma}{\epsilon_0 p} \vec{e}_p & \text{si } p > R \\ \vec{E} = \vec{0} & \text{si } p < R \end{cases}$$

(38)

17

On en déduit \vec{E}_{pol} crée par les densités surfaciques de charges liées comme suit :

i) $a < p < b \rightarrow \boxed{\vec{E}_{pol} = \vec{0}}$ (

ii) $b < p < c \rightarrow \boxed{\vec{E}_{pol} = - \underbrace{\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{2\pi\epsilon_1 b} Q}_{\sigma_p} \cdot \frac{b}{\epsilon_0 p} \vec{e}_p = - \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0) Q}{2\pi\epsilon_1 p \epsilon_0} \vec{e}_p}$

iii) $c < p < d \rightarrow \boxed{\vec{E}_{pol} = - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{2\pi\epsilon_1} \frac{Q}{p \epsilon_0} \vec{e}_p + \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{2\pi\epsilon_1} - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{2\pi\epsilon_2} \right) \frac{Q}{p \epsilon_0} \vec{e}_p}$
 $\rightarrow \boxed{\vec{E}_{pol} = - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{2\pi\epsilon_2} \frac{Q}{p \epsilon_0} \vec{e}_p}$

iv) $p > d \rightarrow \boxed{\vec{E}_{pol} = - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{2\pi\epsilon_2} \frac{Q}{p \epsilon_0} \vec{e}_p + \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{2\pi\epsilon_2} \frac{Q}{p \epsilon_0} \vec{e}_p}$
 $\rightarrow \boxed{\vec{E}_{pol} = \vec{0}}$ celui de (***), crée par $\sigma_p(p > d)$

f) $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{pol} ?$

$a < p < b \rightarrow \left. \begin{aligned} \vec{E} &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 p} \vec{e}_p \\ \vec{E}_0 &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 p} \vec{e}_p, \vec{E}_{pol} = \vec{0} \end{aligned} \right\} \text{ donc } \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_{pol}$

$b < p < c \rightarrow \left. \begin{aligned} \vec{E} &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_1 p} \vec{e}_p \\ \vec{E}_0 &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_1 p} \vec{e}_p, \vec{E}_{pol} = - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{2\pi\epsilon_1 p \epsilon_0} Q \vec{e}_p \end{aligned} \right\}$

(39)

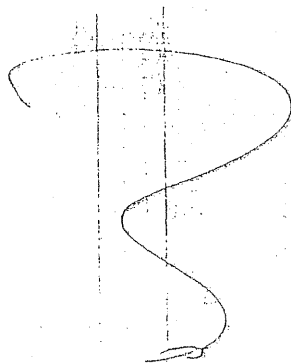
donc $\vec{E}_0 + \vec{E}_{pol} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 P} \left[1 - \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} \right] \vec{e}_P$

$$\vec{E}_0 + \vec{E}_{pol} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 P} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \vec{e}_P = \vec{E}$$

et ainsi de suite --

Je vous suggère de faire un tableau :

$a < P < b$	$b < P < c$	$c < P < d$	$P > d$
$\vec{E}_0 = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 P} \vec{e}_P$	$\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 P} \vec{e}_P$	---	---
$\vec{E}_{pol} = \vec{0}$	$-\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{2\pi\epsilon_1} \frac{Q}{P\epsilon_1} \vec{e}_P$	$-\frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{2\pi\epsilon_2} \frac{Q}{P\epsilon_0} \vec{e}_P$	$\vec{0}$
$\vec{E}_0 + \vec{E}_{pol} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 P} \vec{e}_P$	---	---	---
$\vec{E}_0 + \vec{E}_{pol} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 P} \vec{e}_P$	---	---	---



(40)

19

a) Réductance du circuit

par définition : $\mathcal{R} = \oint \frac{dl}{\mu S}$

d'où $\mathcal{R} = \frac{\pi R}{\mu_1 S} + \frac{\pi R}{\mu_2 S}$

$$\mathcal{R} = \frac{\pi R}{S} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right)$$

$S = \text{Section} = \text{cte}$
 μ_1, μ_2 constantes

b) D'après le théorème d'Ampère (sachant que les lignes de champs sont des cercles)

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int H dl = \pi R H_1 + \pi R H_2 = \pi R (H_1 + H_2)$$

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = N_1 I + N_2 I = (N_1 + N_2) I$$

$$B_1 = \mu_1 H_1$$

$$B_2 = \mu_2 H_2$$

et comme \vec{B} est à flux conservatif, \vec{B} reste constant le long d'une ligne de champ : $B_1 = B_2 = B$
 vient alors :

$$\pi R B \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) = (N_1 + N_2) I$$

d'où

$$\vec{B} = \frac{(N_1 + N_2) I}{\pi R \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right)} \vec{e}_\varphi$$

En en déduire,

(10)

$$\vec{H}_1 = \frac{\vec{B}}{\mu_1} = \frac{\mu_2 (N_1 + N_2) I}{\pi R (\mu_1 + \mu_2)} \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{H}_2 = \frac{\vec{B}}{\mu_2} = \frac{\mu_1 (N_1 + N_2) I}{\pi R (\mu_1 + \mu_2)} \vec{e}_\varphi$$

l'aimantation \vec{M} est donnée par :

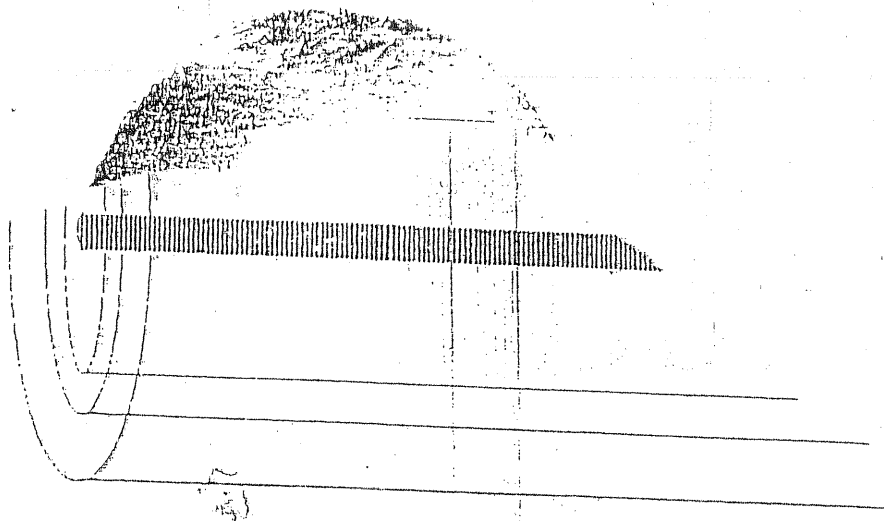
$$\vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \vec{B} \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) = \vec{B} \left(\frac{\mu - \mu_0}{\mu_0 \mu} \right)$$

milieu (1) : $\mu = \mu_1 \Rightarrow \vec{M} = \vec{M}_1 = \frac{\mu_1 - \mu_0}{\mu_0 \mu_1 (\mu_1 + \mu_2)} \frac{\mu_1 \mu_2 (N_1 + N_2) I}{\pi R} \vec{e}_\varphi$

$$\vec{M}_1 = \frac{(\mu_1 - \mu_0) \mu_2 (N_1 + N_2) I}{\mu_0 (\mu_1 + \mu_2) \pi R} \vec{e}_\varphi$$

milieu (2) :

$$\vec{M}_2 = \frac{(\mu_2 - \mu_0) \mu_1 (N_1 + N_2) I}{\mu_0 (\mu_1 + \mu_2) \pi R} \vec{e}_\varphi$$



(10)

21

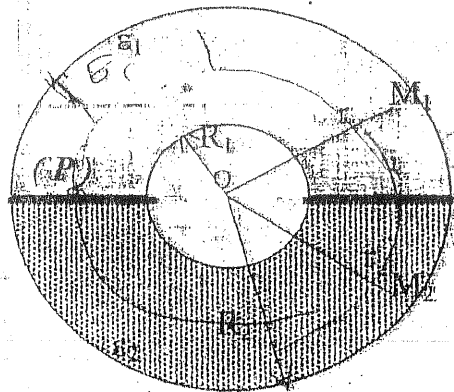
Epreuve d'Electromagnétisme

2^{ème} Partiel - 1^{ère} Session

(Durée: 2h)

Problème 1 (12 points)

On considère un condensateur sphérique dont l'armature interne, de rayon R_1 porte la charge Q_{lib} (positive), et l'armature externe de rayon R_2 la charge $-Q_{lib}$ (Ces charges sont uniformément réparties sur la surfaces des armatures). Un plan diamétral (P) sépare deux milieux diélectriques L.H.I. de permittivité ϵ_1 et ϵ_2 , comme indiqué sur la figure ci-contre.



$E(r) \quad r = \text{cte}$
 $E =$

- 1) En admettant que les surfaces équipotentiellles ($V(M) = C^{te}$) sont des sphères de centre entre O et de rayon r ($R_1 < r < R_2$); En déduire que le champ correspondant $\vec{E}(M)$ est radial ($\vec{E}(M) = E(r) \vec{e}_r$, \vec{e}_r e tant un vecteur unitaire porté par $\vec{OM} = \vec{r}$)
- 2) Utiliser la continuité de la composante tangentielle de \vec{E} à la traversée du plan (P) pour montrer que $E(r)$ est le même en tout point M_1 ou M_2 des 2 hémisphères. M_1 et M_2 étant situés à égale distance r du centre du condensateur.
- 3) En appliquant le théorème de Gauss généralisé, montrer que :

$$\vec{E}(M) = \frac{Q_{lib}}{2\pi r^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \vec{e}_r$$

T.S.V.P

26

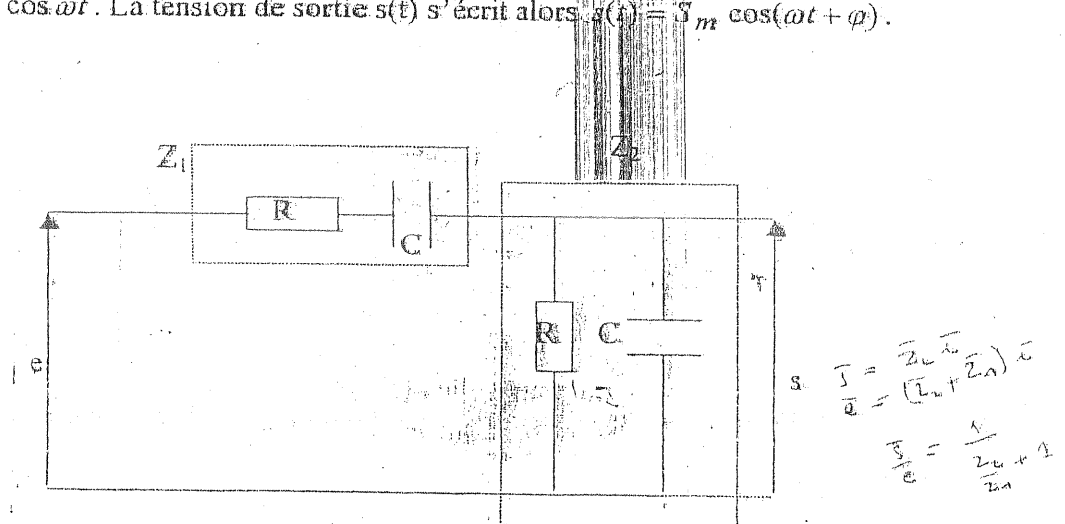
- 4) En déduire en fonction de Q_{lib} , ϵ_1 et ϵ_2 :
 - a) Les vecteurs polarisations électrique $\vec{P}_1(M)$ et $\vec{P}_2(M)$.
 - b) Les densités surfaciques de polarisation.
 - c) Les densités volumique de polarisation.
- 5) Calculer la charge totale de polarisation. Ce résultat est-il prévisible ? Justifier votre réponse.

On rappelle l'expression de la divergence en coordonnées sphériques pour un champ de vecteur radial \vec{A} :

$$\text{div}(\vec{A}(M)) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A(r))$$

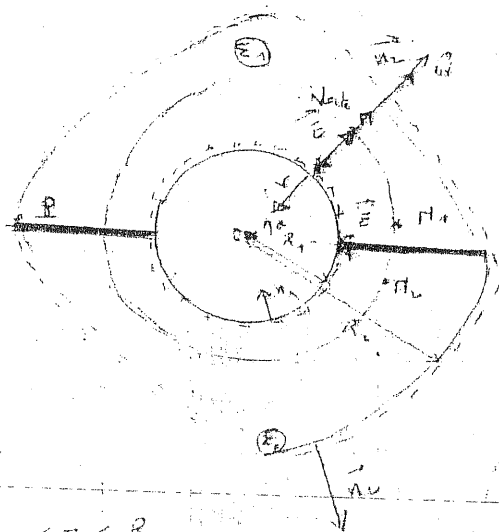
Problème 2 (8 points)

Le montage de la figure ci-dessous est alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E_m \cos \omega t$. La tension de sortie $s(t)$ s'écrit alors $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi)$.



- 1) Montrer que la transmittance complexe s'écrit : $\beta(\omega) = \frac{s}{e} = \frac{1}{1 + Z_1 Y_2}$; où $Y_2 = 1/Z_2$.
- 2) Donner l'expression de $\beta(\omega)$ en fonction de R, C, ω .
- 3) Déterminer la pulsation ω_0 pour laquelle les tensions e et s sont en phase. En déduire $\beta(\omega_0)$.
- 4) Tracer en fonction de la pulsation ω l'allure :
 - a) du module $|\beta(\omega)|$.
 - b) de la phase $\varphi(\omega)$.

EX:1



1/ $R_1 < r < R_2$

sur la sphère de rayon r on a $v = \text{cte} \Rightarrow$

v ne dépend que de r

$\Rightarrow \text{grad } v = \frac{\partial v}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$

$\text{grad } v = \frac{\partial v}{\partial r} \vec{e}_r$

$\Rightarrow \vec{E} = - \text{grad } v = - \frac{\partial v}{\partial r} \vec{e}_r$

$\vec{E} = - \frac{\partial v}{\partial r} \vec{e}_r \Rightarrow \vec{E}$ est radial

et \vec{D} est aussi radial

2/ continuité de la composante tangentielle de \vec{E} en passant à la limite de séparation

$\Rightarrow \vec{E}(r_1) = \vec{E}(r_2)$

on a une seule composante

$(\vec{E} = E(r) \vec{e}_r)$

3/ $\vec{E}(r_1) = \vec{E}(r_2)$

3/ Théorème de Gauss

$\iint \vec{D} \cdot \vec{S} = Q_{\text{lib}}$

$\iint \vec{D}_1 \cdot \vec{S}_1 + \iint \vec{D}_2 \cdot \vec{S}_2 = Q_{\text{lib}}$

$\epsilon_1 E_1 \cdot 2\pi r^2 + \epsilon_2 E_2 \cdot 2\pi r^2 = Q_{\text{lib}}$

on a $E_1(r) = E_2(r) = E(r)$

$(\epsilon_1 + \epsilon_2) E(r) \cdot 2\pi r^2 = Q_{\text{lib}}$

$E(r) = \frac{Q_{\text{lib}}}{2\pi r^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)}$

$\Rightarrow \text{et comme } \vec{E}(r) = E(r) \vec{e}_r$

$\vec{E}(r) = \frac{Q_{\text{lib}}}{2\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) r^2} \vec{e}_r$

4/ a/ $\vec{P}_1 = \vec{D}_1 - \epsilon_0 \vec{E}(r)$
 $= (\epsilon_1 - \epsilon_0) E(r)$

$\vec{P}_1 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)}{2\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) r^2} Q_{\text{lib}} \vec{e}_r$

$\vec{P}_2 = \vec{D}_2 - \epsilon_0 \vec{E}$
 $= (\epsilon_2 - \epsilon_0) E$

$\vec{P}_2(r) = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0)}{2\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) r^2} Q_{\text{lib}} \vec{e}_r$

b/ σ_{P_1}

$\sigma_{P_1}^1 = \vec{P}_1 \cdot \vec{n}_1 = \vec{P}_1 \cdot \vec{n}_1$
 $= - \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0) Q_{\text{lib}}}{2\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) r_1^2}$

$\sigma_{P_1}^2 = \vec{P}_1 \cdot \vec{n}_2 = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0) Q_{\text{lib}}}{2\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) r_2^2}$

$\sigma_{P_2}^1 = \vec{P}_2 \cdot \vec{n}_1 = - \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0) Q_{\text{lib}}}{2\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) r_1^2}$

$\sigma_{P_2}^2 = \vec{P}_2 \cdot \vec{n}_2 = \frac{(\epsilon_2 - \epsilon_0) Q_{\text{lib}}}{2\pi (\epsilon_1 + \epsilon_2) r_2^2}$

$$\rho_p = -\operatorname{div} \vec{P}$$

$$\rho_p = -\operatorname{div} \vec{P}_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E}$$

$$\operatorname{div} \vec{P}_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \operatorname{div} \vec{E}^{(0)}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \vec{E}(r))$$

$$\pi^* E(r) = \frac{Q_{\text{ext}}}{4\pi(\epsilon_1 + \epsilon_0)} = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \operatorname{div} \vec{E} = 0 = 0$$

$$\rho_p = 0 \quad (\text{pas de charge sur la surface})$$

$$\rho_p = -\operatorname{div} \vec{P}_2 = -(\epsilon_2 - \epsilon_0) \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

Electricité 3
 Contrôle Continu (1h15)

Une sphère conductrice S, de centre O et de rayon R_1 , porte une charge positive Q répartie uniformément sur sa surface. Cette sphère est entourée d'une couche sphérique de diélectrique (l.h.i) de permittivité absolue ϵ et de rayons R_1 et R_2 (voir figure). Dans la base orthonormée $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi)$ un point M de l'espace sera repéré par $\vec{OM} = r \vec{e}_r$.

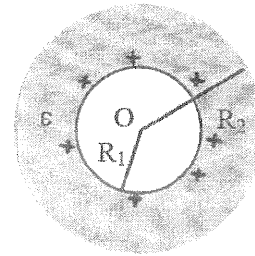
On donne en coordonnées sphériques la divergence d'un vecteur \vec{A} :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin(\theta)} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} [\sin(\theta) A_\theta] \right] + \frac{1}{r \sin(\theta)} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

La polarisation en un point M du diélectrique est de la forme :

$$\vec{P} = \frac{\alpha}{4\pi r^2} \vec{e}_r \quad \text{où } \alpha \text{ est une constante positive.}$$

1. Calculer la densité de charges libres σ de la surface de S.
2. Déterminer les densités de charges de polarisation σ_{p1} et σ_{p2} en surface et ρ_p en volume du milieu diélectrique.
3. Calculer le champ dépolarisant \vec{E}_p créé par les charges de polarisation et préciser son sens. Envisager les trois cas : $r \leq R_1$; $R_1 \leq r \leq R_2$ et $r \geq R_2$.
4. Calculer en fonction de σ , R_1 et r , l'excitation électrique \vec{D} en un point M du diélectrique. En déduire le champ électrique \vec{E} .
5. Déterminer en fonction de σ , R_1 , r et ϵ le vecteur polarisation \vec{P} . En déduire la constante α et la relation entre σ_{p1} et σ .
6. Calculer le potentiel électrique V en un point M de l'espace ($\vec{OM} = r \vec{e}_r$). Envisager les trois cas : $r \leq R_1$; $R_1 \leq r \leq R_2$ et $r \geq R_2$. On prendra $V(\infty) = 0$.
7. Calculer l'énergie électrostatique localisée dans le diélectrique.



Vendredi 28 juin 2013

Examen d'Electricité 3 - Session de rattrapage

(Durée 1h30)

Exercice 1 : Soit diélectrique parfait de forme sphérique de centre O et de rayon R, portant une charge Q répartie dans son volume avec une distribution de charges de densité volumique $\rho(r)$ donnée par la relation:

$$\begin{cases} \rho(r) = \frac{k}{r^2} & \text{pour } 0 < r < R \\ \rho(r) = 0 & \text{pour } r > R \end{cases}$$

avec $\vec{OM} = \vec{r}$, k est une constante positive qu'on déterminera.

Utiliser les notations suivantes:

$(\vec{D}, \vec{E}, \vec{P}, V)$ dans le diélectrique

$(\vec{D}_0, \vec{E}_0, \vec{P}_0, V_0)$ dans le vide.

- ✓ 1) Calculer la constante k en fonction de Q et R et préciser son unité.
- ✓ 2) Calculer le vecteur de déplacement électrique et vérifier l'équation locale du théorème de Gauss ($\text{div } \vec{D} = \rho$) en tout point M de l'espace. (Envisager les cas : $0 < r < R$ et $r > R$)
- ✓ 3) En déduire le vecteur champ électrique et le vecteur polarisation en tout point M de l'espace.
- ✓ 4) Calculer le potentiel électrique correspondant pour $0 < r < R$ et $r > R$.
- 5) Déterminer de deux façons différentes la densité superficielle de polarisation σ_p sur la surface du diélectrique.
- 6) Déterminer la densité volumique de charges de polarisation ρ_p .
- 7) Calculer la charge totale de polarisation Q_p . Ce résultat est-il prévisible. Expliquer pourquoi?
- ✓ 8) Calculer le champ dépolarisant \vec{E}_p dans le diélectrique.
- 9) En adaptant un découpage de tout l'espace en respectant la symétrie du système. Calculer l'énergie électrostatique totale emmagasinée dans cet espace.

Exercice 2 : Soit un milieu aimanté de volume (\mathcal{V}) et de perméabilité absolue μ , limité par une surface quelconque (S) ne contenant aucun courant réel, le reste de l'espace étant le vide. (voir figure ci-dessous).

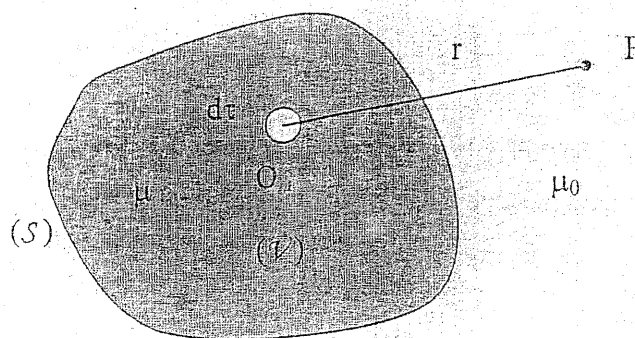
Un élément de volume $d\tau$ du milieu aimanté, centré en O , a un moment magnétique élémentaire $d\vec{m} = \vec{M} d\tau$, où \vec{M} étant le vecteur aimantation.

On rappelle que le potentiel vecteur créé par un dipôle magnétique de moment \vec{m} en un point P de l'espace est :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \wedge \vec{r}}{r^3} \quad \text{avec} \quad \vec{OP} = \vec{r}$$

1°) Donner l'expression du potentiel vecteur \vec{A}_a créé l'élément de volume $d\tau$ en un point P du vide tel que $\vec{OP} = \vec{r}$.

2°) Montrer que le milieu aimanté est équivalent à des courants d'aimantation, réparties dans le volume \mathcal{V} avec la densité volumique $\vec{j}_{av} = \text{rot } \vec{M}$ et à sa surface avec la densité surfacique $\vec{j}_{as} = \vec{M} \wedge \vec{n}$, placés dans le vide. (\vec{n} étant le vecteur unitaire normal à (S)).



Figure

Mercredi 25 juin 2014

Examen d'Electricité 3
Session de rattrapage (Durée 1h30)

I - Question de cours : (8 points)

Soit un atome d'argon dont le noyau a la charge Ze et soit un électron gravitant autour de celui-ci sur une orbite de rayon R à la vitesse v .

Dans la théorie du diamagnétisme de Langevin, le mouvement de l'électron autour du noyau de l'atome est équivalent au mouvement du moment magnétique m généré par un courant i qui passe dans un circuit fermé d'aire S .

- 1) Ecrire la relation entre i , m et S .
- 2) Montrer que le moment magnétique de l'électron s'écrit :

$$m = -\frac{evR}{2}$$

- 3) Montrer qu'un champ magnétique appliqué $B_0 = \mu_0 H_0$, perpendiculaire au plan de l'orbite de l'électron, induit une variation Δm du moment magnétique de l'électron :

$$\Delta m = -\mu_0 \frac{e^2 R^2}{4m_e} H_0$$

(On suppose que seule la vitesse de l'électron v est modifiée).

e est la charge de l'électron, R le rayon de son orbite qui reste constant et m_e sa masse.

Interpréter le signe négatif de Δm .

- 4) Que devient ce résultat si on suppose que l'électron se trouve à une distance moyenne quelconque r du noyau?
- 5) En déduire la susceptibilité diamagnétique χ_d d'un gaz d'argon constitué de N atomes de Z électrons.

II - Exercice : (12 points)

Une sphère diélectrique de centre O, de rayon R et de permittivité relative ϵ_r , polarisée avec une polarisation $\vec{P} = k \vec{r}$, k est une constante positive. Le but de cet exercice est de déterminer quelques grandeurs électrostatiques en tout point M ($\vec{OM} = r \vec{e}_r$) de l'espace.

On utilise les conventions suivantes : \vec{E} le champ électrique dans le diélectrique et \vec{E}_0 le champ électrique dans le vide. Le milieu diélectrique n'est pas parfait.

1. Quelle est la dimension de la constante k ?
2. Calculer $\text{div } \vec{r}$.
3. Calculer la densité volumique ρ_p de charges de polarisation. Préciser son unité.
4. Calculer la densité superficielle σ_p de charges de polarisation. Préciser son unité.
5. Vérifier que la sphère diélectrique reste globalement neutre.
6. Calculer le vecteur champ électrique dû à la polarisation en tout point M de l'espace. Envisager deux cas ($r < R$ et $r > R$).
7. Retrouver par une deuxième méthode la densité surfacique σ_p de charges de polarisation.

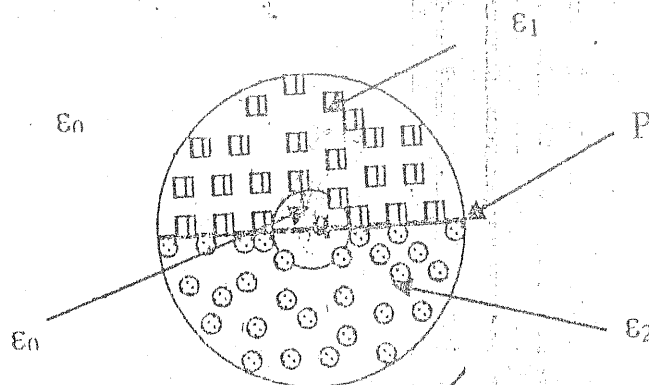
=====

=====

Contrôle N° 1
Module de physique 3 : Electricité

Exercice 1 :

On considère une sphère métallique (S) creuse d'épaisseur négligeable, de centre O et de rayon R . On place au centre de (S) une autre petite sphère métallique conductrice (s) de rayon a et de même centre O . Soit P un plan horizontal qui passe par le centre O et qui divise les deux sphères en deux parties égales. La sphère (s) contient du vide. La moitié supérieure de la sphère (S) est remplie d'un diélectrique linéaire homogène isotrope de permittivité absolue ϵ_1 et la moitié inférieure est remplie d'un autre diélectrique linéaire homogène isotrope de permittivité absolue ϵ_2 . L'espace extérieur à la sphère (S) est le vide. On place au centre O de la petite sphère (s) une charge ponctuelle q . Les deux sphères sont isolées et initialement neutres.



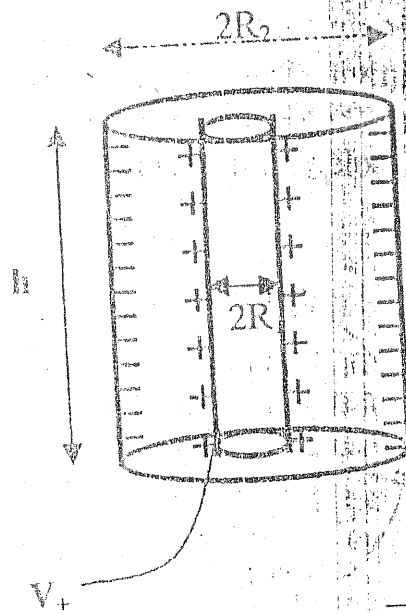
On admet que le champ électrique \vec{E} et le vecteur déplacement électrique \vec{D} ont la symétrie radiale.

- 1) pour $0 < r < a$, calculer les vecteurs déplacements électrique \vec{D}_0 et le champ électrique \vec{E}_0 .
- 2) pour $a < r < R$, calculer les vecteurs déplacements électrique \vec{D}_1 et le champ électrique \vec{E}_1 dans le diélectrique 1, \vec{D}_2 et \vec{E}_2 dans le diélectrique 2.
- 3) pour $R < r < \infty$, infini, calculer les vecteurs déplacements électrique \vec{D}'_0 et le champ électrique \vec{E}'_0 dans le vide.
- 4) En déduire le potentiel V en tout point de l'espace.

- 5) Etablir l'expression de la polarisation \vec{P}_1 dans le milieu ϵ_1 et \vec{P}_2 dans le milieu ϵ_2 .
- 6) Calculer les densités de charges de polarisation là où elles existent.
- 7) En utilisant les conditions de passage du vecteur déplacement électrique \vec{D} à la traversée de chaque surface, calculer les densités de charges réelles qui apparaissent sur les surfaces.

Exercice 2 :

On considère un cylindre conducteur plein C_1 de rayon R_1 , de hauteur h chargé avec une charge positive $+Q$ sous le potentiel V_+ . On place ce cylindre C_1 au centre d'un autre cylindre creux de rayon $R_2 > R_1$ de même hauteur h et chargé avec une charge négative $-Q$ sous un potentiel V_- . L'espace entre les deux cylindres est rempli d'un diélectrique linéaire, homogène, isotrope de permittivité diélectrique ϵ . On suppose que $h \gg R_2$. L'ensemble des deux cylindres constitue donc un condensateur cylindrique.



- 1) Montrer que le vecteur déplacement électrique \vec{D} et le champ électrique \vec{E} sont radiaux.
 - 2) Déterminer \vec{D} et \vec{E} dans le diélectrique.
 - 3) En déduire le potentiel électrique V dans le diélectrique.
 - 4) Déterminer le vecteur polarisation électrique \vec{P} dans le diélectrique.
- Déterminer les charges de polarisation là où elles existent.

$$\vec{D} = \frac{Q}{2\pi R} \vec{e}_r$$

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi \epsilon R} \vec{e}_r$$

Correction du contrôle n° 1

EXERCICE 1

$$\vec{D} = D(r)\vec{u}_r \quad \vec{E} = E(r)\vec{u}_r \quad \text{div } \vec{D} = \rho_{\text{rel}}$$

$$\diamond \quad 0 < r < a$$

$$\iint_{S_1} \vec{D}_0 \cdot d\vec{S} = Q_{\text{int}}(S_1) = q = \iint_{S_1} D_0(r) \cdot \vec{u}_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi du_r \Rightarrow D_0(r) = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$\left(D_0(r) = \frac{q}{4\pi r^2} \right) \Rightarrow \vec{D}_0 = \frac{q}{4\pi r^2} \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{E}_0 = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

$$\diamond \quad a < r < R$$

Sur le plan P, le champ électrique \vec{E} se réduit à sa seule composante tangentielle qui est toujours continue, donc le champ est continu.

$$\vec{E}_1(r) = \vec{E}_2(r) = E(r)$$

$$\iint_{S_2} \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{int}}(S_2) = q =$$

$$\iint_{S_2} D_1(r) \cdot \vec{u}_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi du_r + \iint_{S_2} D_2(r) \cdot \vec{u}_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi du_r =$$

$$\iint_{S_2} \epsilon_1 E_1(r) \cdot \vec{u}_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi du_r + \iint_{S_2} \epsilon_2 E_2(r) \cdot \vec{u}_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi du_r =$$

$$\epsilon_1 E(r) 2\pi r^2 + \epsilon_2 E(r) 2\pi r^2 = q \Rightarrow E(r) = \frac{q}{2\pi r^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{q}{2\pi r^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \vec{u}_r$$

$$\vec{D}_1(r) = \frac{\epsilon_1 q}{2\pi r^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{D}_2(r) = \frac{\epsilon_2 q}{2\pi r^2 (\epsilon_1 + \epsilon_2)} \vec{u}_r$$

$$\diamond \quad R < r < \infty$$

$$\iint_{S_3} \vec{D}' \cdot d\vec{S} = Q_{\text{int}}(S_3) = q = \iint_{S_3} D'(r) \cdot \vec{u}_r \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi du_r \Rightarrow D'(r) = \frac{q}{4\pi r^2}$$

$$\text{et} \quad \vec{D}'(r) = \frac{q}{4\pi r^2} \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{E}'(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{E} = -\text{grad} V \Rightarrow V(r) = -\int E(r) dr + K,$$

$$R < r < \infty$$

$$\vec{E}'(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \Rightarrow V(r) = -\int \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr + K, \text{ pas de charge à l'infini}$$

$$V(r) = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r}$$

$$a < r < R$$

$$E(r) = \frac{q}{2\pi r^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \Rightarrow V(r) = \frac{q}{2\pi r(\epsilon_1 + \epsilon_2)} + K_2$$

Continuité de $V(r)$ au point $r = R$

$$\lim_{r \rightarrow R^-} V(r) = \lim_{r \rightarrow R^+} V(r) \Rightarrow \frac{q}{2\pi R(\epsilon_1 + \epsilon_2)} + K_2 = \frac{q}{4\pi R\epsilon_0} \Rightarrow K_2 = \frac{q}{4\pi R} \left[\frac{1}{\epsilon_0} - \frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right]$$

Continuité de $V(r)$ au point $r = a$

$$\lim_{r \rightarrow a^-} V(r) = \lim_{r \rightarrow a^+} V(r) \Rightarrow \frac{q}{4\pi a(\epsilon_1 + \epsilon_2)} + K_2 = \frac{q}{4\pi a\epsilon_0} + K_1 \Rightarrow$$

$$K_1 = \frac{q}{4\pi R} \left[\frac{1}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{R}{a} \right) + \frac{1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \left(\frac{R}{a} - 2 \right) \right]$$

5) Polarisation :

$$\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E} \Rightarrow$$

$$\vec{P}_1 = \epsilon_0(\epsilon_{r1} - 1)\vec{E}_1 = \epsilon_0(\epsilon_{r1} - 1) \frac{q}{2\pi r^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \vec{u}_r \Rightarrow \vec{P}_1 = \frac{(\epsilon_{r1} - 1) q}{(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) 2\pi r^2} \vec{u}_r$$

$$\vec{P}_2 = \epsilon_0(\epsilon_{r2} - 1)\vec{E}_2 = \epsilon_0(\epsilon_{r2} - 1) \frac{q}{2\pi r^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \vec{u}_r \Rightarrow \vec{P}_2 = \frac{(\epsilon_{r2} - 1) q}{(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) 2\pi r^2} \vec{u}_r$$

6) Charges de polarisation :

$$\rho_{pol} = -\text{div} \vec{P} \Rightarrow \rho_{pol1} = -\text{div} \vec{P}_1 = \rho_{pol2} = -\text{div} \vec{P}_2 = 0 \quad \text{div} \frac{\vec{r}}{r^3} = 0$$

$$\sigma_{pol}(r = a^+) = \vec{P}_1(r = a^+) \cdot \vec{n}(r = a^+) = \frac{(\epsilon_{r1} - 1) q}{(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) 2\pi a^2} \vec{u}_r \cdot (-\vec{u}_r)$$

$$\sigma_{pol}(r = a^+) = - \frac{(\epsilon_{r1} - 1) q}{(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) 2\pi a^2}$$

$$\sigma_{pol}(r = a^-) = \vec{P}_2(r = a^-) \cdot \vec{n}(r = a^-) = \frac{(\epsilon_{r2} - 1) q}{(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) 2\pi a^2} \vec{u}_r \cdot (-\vec{u}_r)$$

$$\sigma_{pol}(r = a^-) = - \frac{(\epsilon_{r2} - 1) q}{(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}) 2\pi a^2}$$

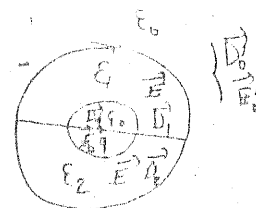
$$\sigma_{pol}(r=R^-) = \overline{P}_1(r=R^-) \cdot \overline{n}(r=R^-) = \frac{(\epsilon_{r1}-1)}{(\epsilon_{r1}+\epsilon_{r2})} \frac{q}{2\pi R^2} \overline{u}_r \cdot (+\overline{u}_r)$$

$$\sigma_{pol}(r=R^-) = + \frac{(\epsilon_{r1}-1)}{(\epsilon_{r1}+\epsilon_{r2})} \frac{q}{2\pi R^2}$$

On vérifie que la somme totale des charges de polarisation est nulle :

$$Q_{pol} = Q_{Vpol} + Q_{Spol} \quad \text{avec} \quad Q_{Vpol} = 0$$

$$Q_{Spol} = - \frac{(\epsilon_{r1}-1)}{(\epsilon_{r1}+\epsilon_{r2})} \frac{q}{2\pi a^2} \cdot 2\pi a^2 - \frac{(\epsilon_{r1}-1)}{(\epsilon_{r1}+\epsilon_{r2})} \frac{q}{2\pi R^2} \cdot 2\pi R^2 + \\ + \frac{(\epsilon_{r2}-1)}{(\epsilon_{r1}+\epsilon_{r2})} \frac{q}{2\pi a^2} \cdot 2\pi a^2 + \frac{(\epsilon_{r2}-1)}{(\epsilon_{r1}+\epsilon_{r2})} \frac{q}{2\pi R^2} \cdot 2\pi R^2 = 0$$



Discontinuité de la composante normale de D :

$$D_1 - D_0 = \sigma_{rel}(r=a^+) \Rightarrow \frac{q\epsilon_1}{2\pi a^2(\epsilon_1+\epsilon_2)} - \frac{q}{2\pi a^2} = \frac{q}{2\pi a^2} \left[\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1+\epsilon_2} - \frac{1}{2} \right]$$

$$D_2 - D_0 = \sigma_{rel}(r=a^+) \Rightarrow \frac{q\epsilon_2}{2\pi a^2(\epsilon_1+\epsilon_2)} - \frac{q}{2\pi a^2} = \frac{q}{2\pi a^2} \left[\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2} - \frac{1}{2} \right]$$

$$D' - D_1 = \sigma_{rel}(r=R^-) \Rightarrow - \frac{q\epsilon_1}{2\pi R^2(\epsilon_1+\epsilon_2)} + \frac{q}{4\pi R^2} = \frac{q}{2\pi R^2} \left[- \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1+\epsilon_2} + \frac{1}{2} \right]$$

$$D' - D_1 = \sigma_{rel}(r=R^-) \Rightarrow - \frac{q\epsilon_1}{2\pi R^2(\epsilon_1+\epsilon_2)} + \frac{q}{4\pi R^2} = \frac{q}{2\pi R^2} \left[- \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1+\epsilon_2} + \frac{1}{2} \right]$$

$$D' - D_2 = \sigma_{rel}(r=R^-) \Rightarrow - \frac{q\epsilon_2}{2\pi R^2(\epsilon_1+\epsilon_2)} + \frac{q}{4\pi R^2} = \frac{q}{2\pi R^2} \left[- \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2} + \frac{1}{2} \right]$$

On vérifie que la somme totale des charges réelles est nulle :

$$\Sigma Q_{rel} = \frac{q}{2\pi a^2} \left[\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1+\epsilon_2} - \frac{1}{2} \right] \cdot 2\pi a^2 + \frac{q}{2\pi a^2} \left[\frac{\epsilon_1}{\epsilon_1+\epsilon_2} - \frac{1}{2} \right] \cdot 2\pi a^2 + \\ + \frac{q}{2\pi R^2} \left[- \frac{\epsilon_1}{\epsilon_1+\epsilon_2} + \frac{1}{2} \right] \cdot 2\pi R^2 + \frac{q}{2\pi R^2} \left[- \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2} + \frac{1}{2} \right] \cdot 2\pi R^2 = 0$$

EXERCICE 2 :

Kalid

$$\vec{E} = E(r)\vec{u}_r \text{ et } \vec{D} = D(r)\vec{u}_r$$

$$0 < r < R_1 \text{ conducteur } \vec{E} = \vec{0}$$

$$R_1 < r < R_2 \text{ diélectrique}$$

$$\iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = +Q = D(r)2\pi rh \Rightarrow \vec{D}(r) = \frac{+Q}{2\pi rh} \vec{u}_r \text{ et } \vec{E}(r) = \frac{+Q}{2\pi\epsilon h} \vec{u}_r$$

$$\vec{E} = -\text{grad}V \Rightarrow V(r) = -\int E(r)dr + K \Rightarrow V(r) = -\frac{Q}{2\pi\epsilon h} \text{Log}r + K$$

$$\lim_{r \rightarrow R_1} V(r) = V_+ \Rightarrow K = V_+ + \frac{Q}{2\pi\epsilon h} \text{Log}R_1$$

$$\lim_{r \rightarrow R_2} V(r) = V_- = V_+ + \frac{Q}{2\pi\epsilon h} \text{Log} \frac{R_1}{R_2}$$

$$V_+ - V_- = V = \frac{Q}{2\pi\epsilon h} \text{Log} \frac{R_2}{R_1}$$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{1}{2\pi\epsilon h} \text{Log} \frac{R_2}{R_1}$$

Polarisation :

$$\vec{P} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1)\vec{E} = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \frac{+Q}{2\pi\epsilon h} \vec{u}_r$$

$$\rho_{pol} = -\text{div}\vec{P} = 0, \text{ il n'y a pas de charges réelles}$$

$$\sigma_{pol}(r = R_1^+) = \vec{P}(r = R_1^+) \cdot \vec{n}(r = R_1^+) = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \frac{+Q}{2\pi\epsilon R_1 h} \vec{u}_r \cdot (-\vec{u}_r)$$

$$\sigma_{pol}(r = R_1^+) = -\epsilon_0(\epsilon_r - 1) \frac{+Q}{2\pi\epsilon R_1 h}$$

$$\sigma_{pol}(r = R_2^-) = \vec{P}(r = R_2^-) \cdot \vec{n}(r = R_2^-) = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) \frac{+Q}{2\pi\epsilon R_2 h} \vec{u}_r \cdot (+\vec{u}_r)$$

$$\sigma_{pol}(r = R_2^-) = +\epsilon_0(\epsilon_r - 1) \frac{+Q}{2\pi\epsilon R_2 h}$$

On vérifie que la somme totale des charges de polarisation est nulle :

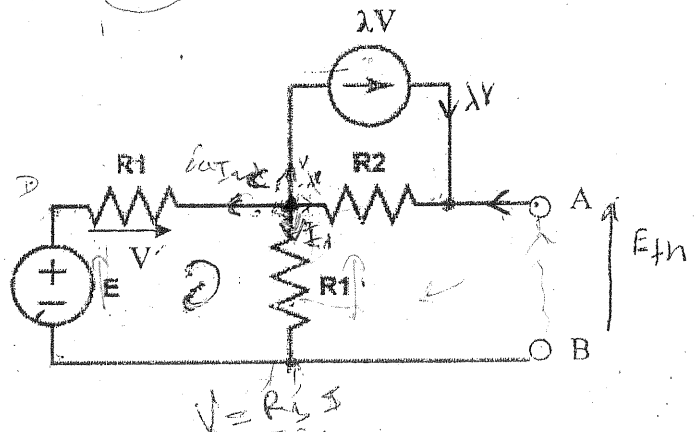
$$Q_{pol} = Q_{Vpol} + Q_{Spol} \text{ avec } Q_{Vpol} = 0$$

$$Q_{pol} = Q_{Spol} = \frac{-Q}{2\pi\epsilon R_1 h} 2\pi R_1 h + \frac{+Q}{2\pi\epsilon R_2 h} 2\pi R_2 h = 0$$

Contrôle N°1 d'électronique (Durée 1h30)

Exercice 1

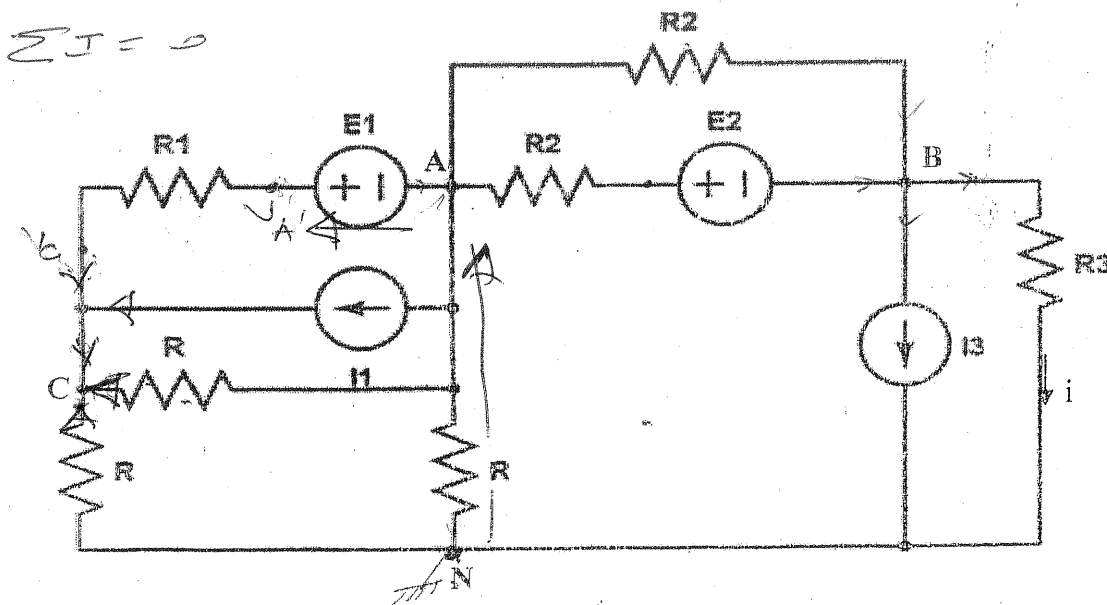
Déterminer en fonction de R_1 , R_2 et E les éléments du générateur de Thévenin du dipôle AB sachant que $\lambda R_2 = 2$.



Exercice 2

1/ Ecrire les équations aux (nœuds) dans le circuit suivant :

(On prendra le potentiel en N comme origine des potentiels)



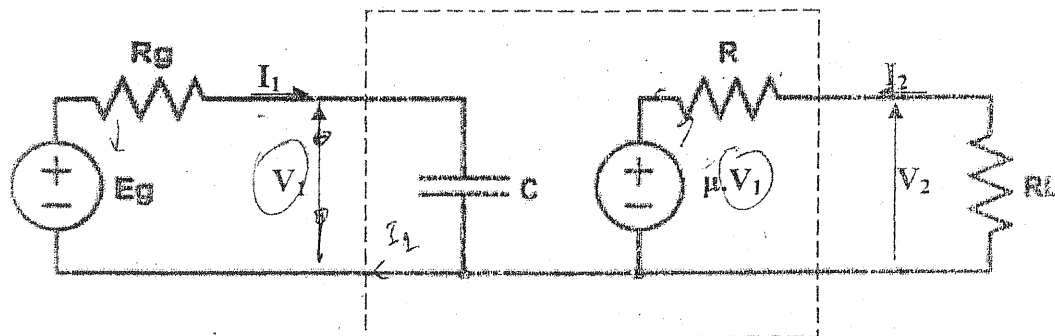
En déduire la valeur du courant i dans R_3 .

2/ Retrouver la valeur du courant i en remplaçant les circuits entre A et N et entre A et B par leurs circuits de Norton équivalents.

On donne : $R_1 = R = 1\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 1/3\Omega$. $E_1 = 1V$, $E_2 = 2V$, $I_3 = 3A$, $I_1 = 1A$.

Exercice 3

On se propose d'étudier les caractéristiques du montage ci-dessous qui inclut un quadripôle constitué des éléments C , $\mu.V_1$ et R .



- 1/ Déterminer les paramètres impédances de ce quadripôle.
- 2/ Déterminer l'impédance d'entrée Z_e , l'impédance de sortie Z_s , le gain en courant A_i et le gain en tension A_v .
- 3/ Déterminer le gain en tension composite A_{VG} et montrer qu'il est de la forme :

$$A_{VG} = \frac{V_2}{E_g} = \frac{G}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

Où G est un nombre réel. On précisera l'expression de G et de ω_c .

CONTROLE ELECTRONIQUE

(Durée : 1h30)

EXERCICE 1 (15pts) :

Soit le montage de la **figure 1**, E représente un générateur de tension continue, et les résistances R_1 , R_2 , R_3 ont respectivement les valeurs nominales de $1,2K\Omega$, 200Ω et 600Ω .

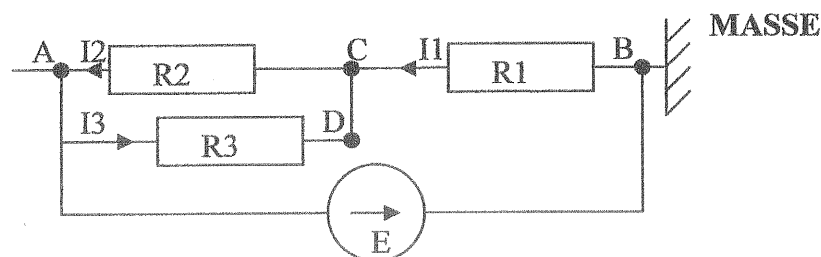


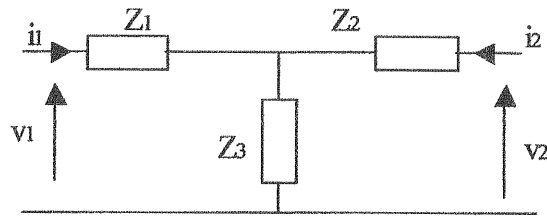
Figure 1

- 1) On fixe la valeur de E à $16V$.
 - a) En utilisant le pont diviseur de tension, quel est le potentiel V_c au point C par rapport à la masse ?
 - b) Retrouver la valeur de ce potentiel V_c en utilisant le théorème de Millman.
 - c) En utilisant le pont diviseur de courant, déterminer I_3 et I_2 en fonction de I_1 , et calculer les valeurs de I_1 , I_2 , et I_3 .
 - d) En utilisant le théorème de Thevenin, retrouver la valeur de I_2 et puis recalculer V_c .
 - e) En coupant la connexion entre les points C et D, quels seront les potentiels par rapport à la masse : V_c au point C et V_d au point D.
 - f) Que deviennent les valeurs de I_1 , I_2 et I_3 ?

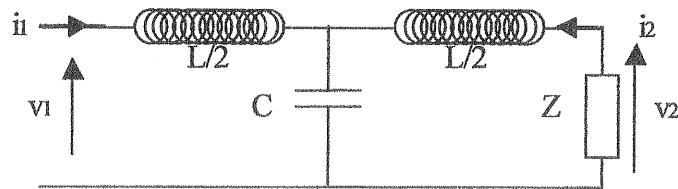
- 2) On laisse la connexion coupée entre C et D et la tension E est toujours égale à $16V$:
 - a) On branche un ampermètre entre les points B et D, quelle sera la valeur absolue du courant I mesuré ?
 - b) On débranche l'ampermètre et on branche un voltmètre entre les mêmes points B et D, quelle sera la valeur absolue de la tension V mesurée ?
 - c) On débranche le voltmètre et on débranche le générateur de tension E tout en maintenant la connexion coupée entre les points C et D : on branche un ohmmètre entre B et D, quelle sera la valeur de la résistance R mesurée ?

EXERCICE 2 (5pts):

On considère le quadripôle en T suivant :



- 1) Déterminer en fonction de Z_1 , Z_2 et Z_3 les éléments h_{ij} de la matrice hybride
- 2) On considère le quadripôle T tel que Z_1 et Z_2 sont constituées d'une self de conductance $\frac{L}{2}$ et Z_3 un condensateur de capacité C . On désire que l'impédance d'entrée du réseau soit égale à Z , montrer que la condition imposée s'écrit : $Z^2 = \frac{L}{C} (1 - \frac{LC}{4} \omega^2)$.



Bon courage